MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 9
10.12.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 9.1 [Potenzreihen, 8 Punkte] Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Potenzreihen? Was ist jeweils der Konvergenzradius?

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ $\qquad$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)^2}{n!}$ $\qquad$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$.

Aufgabe 9.2 [Exponentialfunktion; 8 Punkte] Zeigen Sie:

(i) $|e^{ix}-1| = 2|\sin\frac{x}{2}|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

[2 Punkte; *Tipp:* Berechnen Sie zunächst $\cos(2x)$ mithilfe von Satz 2.64.]

(ii) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ $\forall z \in \mathbb{C}$, direkt mithilfe der Definition (Satz 2.60).

[3 Punkte; *Tipp:* Zeigen Sie zunächst, dass die komplexe Konjugation stetig ist.]

(iii) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^{-q}e^n = \infty$ [3 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie die Exponentialreihe um zu zeigen, dass $e^x > x^{q+1}/(q+1)!$ für alle $x > 0$.]

Bemerkung: Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz.

Aufgabe 9.3 (!) [Restgliedabschätzung; 8 Punkte]

(a) Beweisen Sie die folgende Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion: *Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z),$$

wobei $|R_{N+1}(z)| \leqslant 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leqslant 1 + N/2$.

[3 Punkte; *Tipp:* Schätzen Sie $|R_{N+1}(z)| = |e^z - \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!}|$ durch die Reihe $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ ab, die wiederum durch das Produkt von $|z|^N/(N+1)!$ und der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{N+2}\right)^k$ beschränkt ist.]

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n}(e^{w_n}-1) = 1$, für alle Nullfolgen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen.

[3 Punkte; *Tipp:* Aufgabenteil (a).]

(c) Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{z_n}-e^z}{z_n - z}$. [2 Punkte; *Tipp:* Aufgabenteil (b).]

Aufgabe 9.4 (!) [Topologie von $\mathbb{R}$ – Teil III, 8 Punkte] Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $X \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene (vgl. 6.2) und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkte Menge.

(i) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $y_n \in f(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Unterfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat, mit $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in f(X)$.

[4 Punkte; *Tipp*: Wählen Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = f(x_n)$ und $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie eine konvergente Unterfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.]

(ii) Schlussfolgern Sie, dass $f(X)$ ebenfalls abgeschlossen und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

[4 Punkte; *Tipp für die Beschränktheit:* Nehmen Sie an, es würde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in f(X)$ geben mit $y_n > n$ und finden Sie einen Widerspruch.]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die jeweilige Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 07.01.2014**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/