Übungen zur Analysis 1
für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 8

Aufgabe 8.1 [8 Punkte]

(*a*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Wir wissen bereits, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (6.4(*iii*)).

Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, sowie $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Ist das Wurzel- oder das Quotientenkriterium anwendbar, um über die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ zu entscheiden? [3 Punkte]

Beweis. Wegen $n+1 \leqslant n^2 \ \forall n \geqslant 2$ folgt $1 \leqslant \sqrt[n]{n+1} \leqslant (\sqrt[n]{n})^2$ für fast alle n, und damit $\lim_n \sqrt[n]{n+1} = 1$. Es gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right) = 1\,.$$

Es gilt außerdem: $\limsup_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_n \frac{n}{n+2} = 1$. Es ist also weder das Wurzel- noch das Quotientenkriterium anwendbar, obwohl die Reihe konvergiert. □

(*b*) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls n gerade} \\ 2^{2-n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit dem Wurzel-, Quotienten- *und* dem Majorantenkriterium. [3 Punkte]

Beweis. Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \in \{\frac{1}{8}, 2\}$. Insbesondere gilt also $\limsup_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 2 > 1$, sowie $\liminf_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{8} < 1$, weshalb das Quotientenkriterium keine Aussage liefert.

Weiter gilt $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \lim_n (4 \cdot 2^{-n})^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_n \sqrt[n]{4} = \frac{1}{2} < 1$, wobei wir benutzt haben, dass $\lim_n \sqrt[n]{4} = 1$, denn $1 < \sqrt[n]{4} \leqslant \sqrt[n]{n}$ für alle $n \geqslant 4$. Die Reihe konvergiert also nach dem Wurzelkriterium.

Die schnellste Methode liefert allerdings das Majorantenkriterium, denn $a_n \leqslant 4 \cdot 2^{-n}$ und $\sum_n (\frac{1}{2})^n$ konvergiert (geometrische Reihe, vgl. auch 7.3a). □

(*c*) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{3n^4-4n+3}$ absolut konvergiert. [2 Punkte]

Beweis. Mit $b_n := (1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2})(3-\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^4})^{-1}$ gilt

$$a_n := \frac{n^2+n+5}{3n^4-4n+3} = \frac{1}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^4}} = \frac{b_n}{n^2}$$

Da $\lim_n b_n = \frac{1}{3}$, ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt. Es gibt also eine Konstante $C > 0$, sodass $|a_n| \leqslant \frac{C}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sum_n n^{-2} < \infty$ (7.3d), folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$ aus dem Majorantenkriterium. □

Aufgabe 8.2 [Raabekriterium; 8 Punkte]

(a) In dieser Aufgabe beweisen wir folgende Verfeinerung des Quotientenkriteriums: *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\beta > 1$ existieren, mit*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 - \frac{\beta}{n} \qquad \forall n \geqslant n_0 \tag{$*$}$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Bemerkung: Man sagt, dass eine Aussage $A(n)$ *fast immer* gilt, falls sie nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ falsch ist, d.h. falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt.

(i) Setzen Sie $\alpha_n := |a_n|$ und zeigen Sie unter der Annahme von ($*$), dass fast immer gilt: $(\beta-1)\alpha_n \leqslant (n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1}$ [1 Punkt]

Beweis. Aus ($*$) folgt $n\alpha_{n+1} \leqslant n\alpha_n - \beta\alpha_n$ für fast alle n. Ziehen wir auf beiden Seiten α_n ab und bringen $\beta\alpha_n$, sowie $n\alpha_{n+1}$ jeweils auf die andere Seite, so erhalten wir die angegebene Ungleichung. □

(ii) Folgern Sie, dass die Folge $(n\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ab einem bestimmten $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton fällt. [1 Punkt]

Beweis. Setzen wir $b_n := n\alpha_{n+1}$, so folgt aus der in (a) gezeigten Ungleichung und $\beta-1 > 0$, dass $b_{n-1}-b_n \geqslant 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ab einem bestimmten n_0 monoton fallend. □

(iii) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1})$ konvergiert. [2 Punkte]

Beweis. Die Partialsummen der angegebenen Reihe sind Teleskopsummen der Form $\sum_{n=1}^{N}(b_{n-1}-b_n)$ mit $b_n = n\alpha_{n+1}$. Die Reihe ist somit genau dann konvergent (vgl. 6.4), wenn $(b_n)_n$ konvergiert. Da $(b_n)_n$ aber nach (ii) ab einem n_0 monoton fallend ist, und nach unten beschränkt ($b_n \geqslant 0$), konvergiert $(b_n)_n$. □

(iv) Schließen Sie den Beweis ab, indem Sie die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgern. [1 Punkt]

Beweis. Aus (i) folgt $|a_n| \leqslant (\beta-1)^{-1}(b_{n-1} - b_n)$ fast immer, mit $b_n = n\alpha_{n+1}$ wie in (ii). Die Aussage folgt also aus dem Majorantenkriterium und (iii). □

(*b*) Sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$.

[3 Punkte; *Tipp:* Wählen Sie $n_0 \geqslant (\alpha+1)^2/(\alpha-1)$ und zeigen Sie, dass dann für alle $n \geqslant n_0$ die Ungleichung $\frac{n+1}{\alpha+n+1} \leqslant 1-\frac{\alpha+1}{2n}$ gilt.]

Beweis. Die Ungleichung $\frac{n+1}{\alpha+n+1} \leqslant 1-\frac{\alpha+1}{2n}$ ist äquivalent zu $2n(n+1) \leqslant 2n(\alpha+n+1) - (\alpha+n+1)(\alpha+1)$. Durch ausmultiplizieren sehen wir, dass diese Ungleichung äquivalent ist zu $2\alpha n \geqslant (\alpha+1)^2+(\alpha+1)n$, also zu $n \geqslant (\alpha+1)^2/(\alpha-1)$. Wählen wir nun ein solches $n_0 \geqslant (\alpha+1)^2/(\alpha-1)$, so gilt die Ungleichung auch für alle $n \geqslant n_0$, und aufgrund der gezeigten Äquivalenzen folgt $\frac{n+1}{\alpha+n+1} \leqslant 1-\frac{\alpha+1}{2n}$ für alle $n \geqslant n_0$. Die Konvergenz der Reihe ergibt sich nun mit $\beta := (\alpha+1)/2 > 1$ aus (*a*), da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1}$. □

Aufgabe 8.3 [Leibnizkriterium; 8 Punkte]

(*a*) Untersuchen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2k+1}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. [2 Punkte]

Beweis. Die Folge $(a_k)_k$ definiert durch $a_k = \frac{(-2)^k}{2k+1}$ ist keine Nullfolge, denn $2^k > 2k+1$ für alle $k \geqslant 3$, d.h. $|a_k| \geqslant 1$ für alle $k \geqslant 3$. Die Reihe kann also nicht konvergieren.

Bemerkung: Bei der Angabe handelt es sich um einen Tippfehler. Es war eigentlich die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ gemeint, welche nach dem Leibnizkriterium konvergiert, denn $1/(2k+1)$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Diese Reihe konvergiert allerdings nicht absolut, denn $\frac{1}{2k+1} \geqslant \frac{1}{4k}$ und $\sum_k k^{-1} = \infty$. □

(*b*) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. [2 Punkte]

Beweis. Diese Aussage ist falsch, was folgendes Beispiel zeigt: Sei $b_k = (-1)^k$ und $a_k = (-1)^k k^{-1}$. Dann ist $|b_k| = 1$, d.h. $(b_k)_k$ ist beschränkt, und außerdem konvergiert $\sum_k a_k$ nach dem Leibniz-Kriterium. Allerdings gilt $a_k b_k = k^{-1}$, also ist $\sum_k a_k b_k$ die harmonische Reihe und konvergiert damit nicht. □

(*c*) Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n \leqslant \frac{1}{n}$ $\forall n \geqslant n_0$ sowie $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ $\forall n \geqslant n_1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert. [2 Punkte]

Beweis. $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge, denn $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ (siehe Bem. in 8.2a), und für die Konvergenz einer Folge ist nur interessant was für fast alle n passiert, also für alle n größer als einem bestimmten $n_0 \in \mathbb{N}$ (warum?). Außerdem ist $(a_n)_n$ ab $n_1 \in \mathbb{N}$ monoton fallend. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert somit die Reihe $\sum_{k=n_1}^{\infty}(-1)^k a_k$. Da diese sich nur um endlich viele Terme von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ unterscheidet konvergiert die letztere ebenso. □

(*d*) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k = (k+1)^{-1}$ falls k gerade, und $a_k = (k+1)^{-2}$ falls k ungerade ist. Prüfen Sie die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ auf Konvergenz. [2 Punkte]

Beweis. Spalten wir die Summe in ungerade und gerade k, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{2l} a_{2l} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{2l-1} a_{2l-1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)^2}\,.$$

Da $\sum_l l^{-2} < \infty$, und $\sum_l (2l+1)^{-1} = \infty$ divergiert die alternierende Reihe.

Bemerkung: Dies zeigt, dass es für eine alternierende Reihe $\sum_k (-1)^k a_k$ nicht genügt, dass $(a_k)_k$ eine Nullfolge ist. Die Monotonie ist entscheidend. □

Aufgabe 8.4 [Kondensationskriterium, 8 Punkte]

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leq 2^k a_{2^k}.$$

Schlussfolgern Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert. [2 Punkte; Diese Aussage ist auch als *Kondensationskriterium* bekannt.]

Beweis. Für $n \in \{2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}\}$ gilt $a_{2^{k+1}} \leq a_n \leq a_{2^k}$ aufgrund der Monotonie von (a_k). Da wir genau 2^k Terme aufsummieren gilt also

$$2^k a_{2^{k+1}} = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^k} = 2^k a_{2^k}.$$

Das beweist die erste Aussage.

Schreiben wir $s'_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$ und $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ folgt (durch Aufsummieren der Ungleichungen), dass $\frac{1}{2}(s'_n - s'_1) \leq s_{2^n} \leq s'_n$. Da (s'_n) und (s_n) monoton wachsende Folgen sind, ist Konvergenz äquivalent zu beschränktheit. Aber die beiden Ungleichungen zeigen, dass wenn $s_n \leq A$ für alle n dann $s'_n \leq 2A + s_1$ für alle n und dass wenn $s'_n \leq B$ für alle n dann $s_n \leq B$ für alle n. Folglich ist s_n genau dann beschränkt (also konvergent) wenn s'_n beschränkt (also konvergent) ist. □

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ schreiben wir für alle $y \in \mathbb{R}$

$$l_x(y) = \sup\left(\{n \in \mathbb{N} | x^n \leqslant y\} \cup \{1\}\right).$$

Zeigen Sie, dass dieses Supremum existiert. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche divergieren? Beweisen Sie ihre Aussage.

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_2(n)}$ (*ii*)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_3(n)^2}$ (*iii*)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, l_2(n) l_2(l_2(n))^2}$.

[6 Punkte; *Tipps*: Für (*ii*), zeigen Sie, dass $l_3(2^n) \geq l_4(2^n) \geq n/2 - 1$. Für (*iii*), wenden Sie das Kondensationskriterium zweimal an.]

Beweis. Wir haben $\lim_n x^n = \infty$ nach z. B. 6.1(i), somit ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} | x^n \leqslant y\} \cup \{1\}$ beschränkt und nicht-leer, hat also ein Supremum.

Für (i) beobachten wir, dass $l_2(2^n) = n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Darüber hinaus ist $l_x(n)$ monoton wachsend in n für alle $x > 1$. Folglich dürfen wir das Kondensationskriterium anwenden, und $\sum_n \frac{1}{n\, l_2(n)}$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_n \frac{2^n}{2^n\, l_2(2^n)} = \sum_n \frac{1}{n}$ konvergiert. Aber das ist genau die harmonische Reihe, deren Divergenz aus der Vorlesung bekannt ist.

Für (ii) beobachten wir, dass $3^k < 4^k$, und somit $l_3(n) \geq l_4(n)$. Darüber hinaus ist $l_4(2^{2n}) = l_4(4^n) = n$ und auch $l_4(2^{2n+1}) = n$. Folglich gilt in allen Fällen $l_3(n) \geq n/2 - 1$. Nun wenden wir wieder das Kondensationskriterium an: $\sum_n \frac{1}{n\, l_3(n)^2}$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_n \frac{2^n}{2^n l_3(2^n)^2}$ konvergiert. Aber

$$\frac{2^n}{2^n l_3(2^n)^2} = \frac{1}{l_3(2^n)^2} \leq \frac{1}{(n/2-1)^2} = \frac{4}{(n-2)^2}$$

und wir wissen, dass $\sum_{n>2} \frac{1}{(n-2)^2}$ konvergiert (vgl. 7.3(d)). Somit konvergiert auch $\sum_n \frac{1}{n\, l_3(n)^2}$.

Für (iii) benutzen wir das Kondensationskriterium zwei mal. Wir wissen dass $\sum_n \frac{1}{n\, l_2(n) l_2(l_2(n))^2}$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_n \frac{2^n}{2^n\, l_2(2^n) l_2(l_2(2^n))^2}$ konvergiert. Aber diese Summe ist $\sum_n \frac{1}{n l_2(n)^2}$ (da $l_2(2^n) = n$). Es handelt sich wiederum um eine Summe mit monoton fallenden Gliedern, und somit konvergiert sie genau dann, wenn $\sum_n \frac{2^n}{2^n l_2(2^n)^2}$ konvergiert. Aber diese letzte Summe ist nun $\sum_n \frac{1}{n^2}$ und konvergiert (7.3(d)). $\square$