MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
Lösung 7
26.11.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 7

Aufgabe 7.1 [Häufungspunkte; 8 Punkte]

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass $C > 0$ existiert mit $|a_n| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge? Wenn ja, warum? [1 Punkt]

Beweis. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, besitzt die Folge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt, d.h. sie enthält eine konvergente Teilfolge. $\square$

(b) Finden Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}$. [2 Punkte]

Beweis. Die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen die Häufungspunkte -1 und 1. Da durch diese beiden Teilfolgen alle Folgenglieder von $(a_n)_n$ getroffen werden, gibt es keine weiteren Häufungspunkte. $\square$

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung des Satzes von Bolzano-Weierstraß nicht stimmt, d.h. finden Sie eine unbeschränkte Folge, die einen Häufungspunkt besitzt. [2 Punkte]

Beweis. Die Folge $(a_n)_n$ definiert durch $a_n := 1/n$ falls n gerade, und $a_n := n$ falls n ungerade ist, besitzt den Häufungspunkt 0, ist aber unbeschränkt: Für jedes $C > 0$ gibt es eine ungerade natürliche Zahl $N > C$, d.h. $a_N = N > C$. $\square$

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. [3 Punkte; *Tipp:* Die Sätze 2.25 und 2.26 für die nicht-triviale Richtung.]

Beweis. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann konvergiert nach Satz 2.11 *jede* Teilfolge von (a_n) auch gegen a. Nehmen wir nun an, dass jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a konvergiert. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, gibt es mindestens eine solche Teilfolge, d.h. a ist (der einzige) Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Es folgt $a = \liminf_n a_n = \limsup_n a_n$ und damit ist $(a_n)_n$ nach Satz 2.26 konvergent mit Grenzwert a. $\square$

Aufgabe 7.2 [8 Punkte] Sei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - nx^2\right] = 2x$. [2 Punkte]

Beweis. Es ist $\lim_{n\to\infty} \left[n(x + \frac{1}{n})^2 - nx^2\right] = 2x + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2x$. $\square$

(b) Sei nun k eine natürliche Zahl. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(x+\frac{1}{n}\right)^k - nx^k\right]. \tag{$*$}$$

[6 Punkte; *Tipp*: Induktion oder Binomischer Satz]

Beweis. Wir beweisen, dass der gesuchte Grenzwert gleich kx^{k-1} ist (woran erinnert Sie dieser Ausdruck?): Für $k=1$ gilt $n(x+\frac{1}{n}) - nx = 1 = 1\cdot x^{1-1}$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, $(*)$ konvergiere für ein $k\in\mathbb{N}$ gegen kx^{k-1} und folgern:

$$n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{k+1} - nx^{k+1} = \left(x+\frac{1}{n}\right)\left[n\left(x+\frac{1}{n}\right)^k - nx^k\right] + x^k$$

Da die rechte Seite nach den Regeln für Grenzwerte von Produkten und der Induktionsannahme gegen $x\cdot kx^{k-1}+x^k = (k+1)x^k$ konvergiert, folgt die Aussage. □

Aufgabe 7.3 (!) [Konvergenzkriterien für Reihen; 8 Punkte]

(a) Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$. [2 Punkte]

Beweis. Nach Satz 2.31 über die geometrische Reihe gilt $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^0} = 1$. □

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n}$ konvergiert. [2 Punkte; *Tipp:* Quotientenkriterium]

Beweis. Mit $a_n = \frac{n}{2^n}$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, also $\limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2} < 1$, weshalb die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert. □

(c) Warum ist es nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist? [1 Punkt; *Tipp:* Nennen Sie eine Nullfolge, deren zugehörige Reihe nicht konvergiert.]

Beweis. Standardbeispiel ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$. □

(d) Finden Sie alle $k\in\mathbb{N}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n^{-k}$ konvergiert, und beweisen Sie Ihre Aussage. [3 Punkte; *Tipp:* Majorantenkriterium und Aufgabe 6.4(*iii*)]

Beweis. Die Reihe konvergiert für $k\geqslant 2$, denn wegen $n(n+1)\leqslant 2n^2$ gilt $\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2}{n(n+1)}$ und da $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert (Aufgabe 6.4), folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$ nach dem Majorantenkriterium. Weiter gilt $n^{-k}\leqslant n^{-2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $k\geqslant 2$, d.h. es konvergieren alle Reihen der Form $\sum_{n=1}^\infty n^{-k}$ für $k\geqslant 2$. □

Aufgabe 7.4 (!) [Majorantenkriterium; 8 Punkte] Seien $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen in dieser Aufgabe *ohne das Quotientenkriterium* die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{x^n}\,. \tag{$*$}$$

Hinweis: Verwechseln Sie den Summations-Index n nicht mit dem festen $k \in \mathbb{N}$. Beachten Sie außerdem, dass die Konstanten N_1, N_2, C_1 und C_2, die in den folgenden Teilaufgaben auftreten, zwar von k aber nicht von n abhängen dürfen.

(*i*) Zeigen Sie, dass es positive Konstanten N_1 und C_1 gibt, sodass für $n > N_1$

$$x^n > C_1 n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1).$$

Beweis. [2 Punkte] Wir schreiben $x = 1 + \epsilon$ (mit ϵ größer Null) und erhalten aus dem binomischen Lehrsatz

$$x^n = (1+\epsilon)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \epsilon^l.$$

Alle Summanden sind positiv, somit ist jeder eine untere Schranke für die Summe. Daher gilt

$$x^n > \binom{n}{k+2} \epsilon^{k+2}$$

für alle $n > N_1 := k+2$. Da

$$\binom{n}{k+2} = \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} = \frac{(n)(n-1)\dots(n-k-1)}{(k+2)!}$$

gilt die zu zeigende Ungleichung mit $C_1 = \frac{\epsilon^{k+2}}{(k+2)!}$. □

(*ii*) Zeigen Sie, dass es positive Konstanten N_2 und C_2 gibt, sodass für $n > N_2$

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} < C_2.$$

[3 Punkte; *Tipp*: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = 1$.]

Beweis. Wie im Tipp berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n/n)((n-1)/n)\dots((n-k+1)/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1)(1-1/n)\dots(1-(k-1)/n)} \\
&= \frac{1}{1 \times 1 \times \dots \times 1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Hierbei folgt die erste Gleichheit, da im Nenner genau k Faktoren vorkommen, auf die wir die Faktoren n aus dem Zähler "verteilen". Die restlichen Schritte sind Anwendungen der Grenzwertsätze.

Folglich gibt es ein N_2 so dass für alle $n > N_2$ folgendes gilt:

$$\left|\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} - 1\right| < 1$$

(Anwendung der Definition von Grenzwert mit $\epsilon = 1$.) Somit folgt die zu zeigende Ungleichung, mit $C_2 = 2$, aus der Dreiecksungleichung. □

(*iii*) Schließen Sie den Beweis ab, indem Sie $(*)$ mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ vergleichen, deren Konvergenz in Aufgabe 6.4(*iii*) gezeigt wurde. [3 Punkte]

Beweis. Seien $N = \max(N_1, N_2)$ und $D = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^k}{x^n}$. Dann gilt für alle $m > N$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{n^k}{x^n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n^k}{x^n} + \sum_{n=N+1}^{m} \frac{n^k}{x^n} \\
&\leq D + \frac{1}{C_1} \sum_{n=N+1}^{m} \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)} \\
&\leq D + \frac{C_2}{C_1} \sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{(n-k)(n-k-1)} \\
&\leq D + \frac{C_2}{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung auf der rechten Seite ist eine Konstante (unabhängig von m). Folglich ist die monoton wachsende Partialsummenfolge (auf der linken Seite) beschränkt und somit konvergent. □