Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 7
26.11.2013

Übungen zur Analysis 1
für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 7.1 [Häufungspunkte; 8 Punkte]

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass $C > 0$ existiert mit $|a_n| \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge? Wenn ja, warum? [1 Punkt]

(b) Finden Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}$. [2 Punkte]

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung des Satzes von Bolzano-Weierstraß nicht stimmt, d.h. finden Sie eine unbeschränkte Folge, die einen Häufungspunkt besitzt. [2 Punkte]

(d) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. [3 Punkte; *Tipp:* Die Sätze 2.25 und 2.26 für die nicht-triviale Richtung.]

Aufgabe 7.2 [8 Punkte] Sei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - nx^2\right] = 2x$. [2 Punkte]

(b) Sei nun k eine natürliche Zahl. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)^k - nx^k\right].$$

[6 Punkte; *Tipp*: Induktion oder Binomischer Satz]

Aufgabe 7.3 (!) [Konvergenzkriterien für Reihen; 8 Punkte]

(a) Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. [2 Punkte]

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergiert. [2 Punkte; *Tipp:* Quotientenkriterium]

(c) Warum ist es nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist? [1 Punkt; *Tipp:* Nennen Sie eine Nullfolge, deren zugehörige Reihe nicht konvergiert.]

(d) Finden Sie alle $k \in \mathbb{N}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ konvergiert, und beweisen Sie Ihre Aussage. [3 Punkte; *Tipp:* Majorantenkriterium und Aufgabe 6.4(iii)]

Aufgabe 7.4 (!) [Majorantenkriterium; 8 Punkte] Seien $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen in dieser Aufgabe *ohne das Quotientenkriterium* die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{x^n}\,. \tag{$*$}$$

Hinweis: Verwechseln Sie den Summations-Index n nicht mit dem festen $k \in \mathbb{N}$. Beachten Sie außerdem, dass die Konstanten N_1, N_2, C_1 und C_2, die in den folgenden Teilaufgaben auftreten, zwar von k aber nicht von n abhängen dürfen.

(*i*) Zeigen Sie, dass es positive Konstanten N_1 und C_1 gibt, sodass für $n > N_1$

$$x^n > C_1 n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1).$$

[2 Punkte; *Tipp*: Schreiben Sie $x = 1+\epsilon$ und wenden Sie den binomischen Satz an.]

(*ii*) Zeigen Sie, dass es positive Konstanten N_2 und C_2 gibt, sodass für $n > N_2$

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} < C_2.$$

[3 Punkte; *Tipp*: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = 1$.]

(*iii*) Schließen Sie den Beweis ab, indem Sie $(*)$ mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ vergleichen, deren Konvergenz in Aufgabe 6.4(*iii*) gezeigt wurde. [3 Punkte]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die jeweilige Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 03.12.2013**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/