

## Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

### Lösung zu Blatt 6

**Aufgabe 6.1** [Konvergenz von  $n^{1/n}$ ; 8 Punkte] *Zeigen Sie:*

(i)  $(1 + b)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}b^2$ , für alle  $b \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  [*Tipp*: Binomischer Satz]

*Beweis.* [2 Punkte] Wegen  $b \geq 0$  gilt  $1 + b \geq 1$ , d.h. die Ungleichung gilt für  $n = 1$ . Aus dem binomischen Satz folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$

$$(1 + b)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b^k \geq 1 + \binom{n}{2} b^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} b^2,$$

wobei für die Ungleichung benutzt wurde, dass alle Terme der Summe wegen  $b \geq 0$  nicht-negativ sind.  $\square$

(ii)  $\sqrt[n]{n} \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* [2 Punkte] Setze  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  streng monoton wachsend (einfache Anwendung von Induktion, kann aber als bekannt angenommen werden). Nach Satz 1.51 existiert darum die Umkehrabbildung  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt[n]{x}$ , und diese ist ebenso streng monoton wachsend. Da  $n \geq 1$  gilt also  $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Alternativ (direkter Beweis).* Da  $x < 1 \Rightarrow x^n < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was äquivalent ist zu  $x^n \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , folgt die Aussage wenn wir  $x = \sqrt[n]{n}$  wählen.  $\square$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

*Beweis.* [4 Punkte] Wir verwenden (i) mit  $b := \sqrt[n]{n} - 1$ , wobei  $b \geq 0$  wegen (ii). Es folgt

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + b)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

also  $(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n}$  für alle  $n > 1$ . Es folgt  $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  eine Nullfolge ist: Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$  für alle  $n \geq N$ . Wegen der strengen Monotonie der Wurzelfunktion (Satz 1.51) folgt auch  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ .  $\square$

**Aufgabe 6.2** [Topologie von  $\mathbb{R}$  – Teil I; 8 Punkte] Für eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  sagen wir:

- $X$  ist *offen*, wenn  $\forall x \in X \exists \epsilon > 0 : ]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset X$ ,
- $X$  ist *abgeschlossen*, wenn für alle konvergenten Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$ , auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in X$ ,
- $X$  ist *diskret*, wenn  $\forall x \in X \exists \epsilon > 0 : ]x - \epsilon, x + \epsilon[ \cap X = \{x\}$ .

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche sind abgeschlossen, welche diskret? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

- |                   |                    |                                      |
|-------------------|--------------------|--------------------------------------|
| (i) $X = ]0, 1[$  | (iii) $Z = ]0, 1]$ | (v) $W = \{1/n   n \in \mathbb{N}\}$ |
| (ii) $Y = [0, 1]$ | (iv)* $\mathbb{Z}$ | (vi)* $W \cup \{0\}$                 |

*Beweis.* [(i), (ii), (iii), (v) jeweils 1 Punkt (halbe Punkte wenn mindestens eine der drei Fragen richtig ist); (iv) und (vi) jeweils 2 Punkte]

(i)  $X$  ist offen, da für  $0 < x < 1$  und  $0 < \epsilon < \min(x, 1 - x)$ ,  $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset X$ .

$X$  ist nicht abgeschlossen, da wenn  $a_n = 1/n$ , dann  $a_n \in X$  aber  $\lim_n a_n = 0 \notin X$ .

$X$  ist nicht diskret, da für alle  $\epsilon < 1/2$ ,  $]1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon[ \cap X = ]1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon[ \neq \{1/2\}$ .

(ii)  $Y$  ist nicht offen, da für alle  $\epsilon > 0$ ,  $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[ \not\subset Y$ .

$Y$  ist abgeschlossen, da wenn  $a_n \in Y$  eine konvergente Folge ist, dann  $0 \leq a_n \leq 1$  und somit  $0 \leq \lim_n a_n \leq 1$ , und somit  $\lim_n a_n \in Y$ .

$Y$  ist nicht diskret, mit der selben Begründung wie bei  $X$ .

(iii)  $Z$  ist nicht offen, mit der selben Begründung wie bei  $Y$ .

$Z$  ist nicht abgeschlossen, mit der selben Begründung wie bei  $X$ .

$Z$  ist nicht diskret, mit der selben Begründung wie bei  $X$ .

(iv)  $\mathbb{Z}$  ist nicht offen, da für alle  $\epsilon > 0$ ,  $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[ \not\subset \mathbb{Z}$ .

$\mathbb{Z}$  ist abgeschlossen: sei  $a_n \in \mathbb{Z}$  eine Folge mit  $\lim_n a_n = a$ . Dann gibt es  $N$  so dass für  $n \geq N$ ,  $|a_n - a| < 1/4$ . Dann gilt für  $n > N$ , dass  $|a_n - a_N| < 1/4 + 1/4 = 1/2$ . Aber  $a_n \in \mathbb{Z}$  und  $a_N \in \mathbb{Z}$ , und somit  $a_n = a_N$ . Folglich ist  $a = a_N \in \mathbb{Z}$ .

$\mathbb{Z}$  ist diskret: für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $\epsilon = 1/2$  gilt  $]n - \epsilon, n + \epsilon[ \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ .

(v)  $W = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht offen, mit der selben Begründung wie für  $Z$ .

$W$  ist nicht abgeschlossen, da  $a_n = 1/n \in W$  aber  $\lim_n a_n = 0 \notin W$ .

$W$  ist diskret, da für  $1/n \in W$  und  $\epsilon = 1/n - 1/(n+1) > 0$  gilt, dass  $]1/n - \epsilon, 1/n + \epsilon[ \cap W = \{1/n\}$ .

(vi)  $W' = W \cup \{0\}$  ist nicht offen, mit der selben Begründung wie bei  $W$ .

$W'$  ist abgeschlossen: sei  $a_n \in W'$  mit  $\lim_n a_n = a$ . Wenn  $a = 0$  bleibt nichts zu tun ( $0 \in W'$ ). Andernfalls gilt  $a > 0$  (da  $a_n \geq 0$  für alle  $n$  gilt auch  $a \geq 0$ ). Die Folge  $b_n := 1/a_n$  hat  $b_n \in \mathbb{Z}$  für alle  $n$ , und folglich gilt  $1/a = \lim_n b_n =: r \in \mathbb{Z}$ , da  $\mathbb{Z}$  abgeschlossen ist. Da  $a > 0$  ist  $r > 0$  und somit  $r \in \mathbb{N}$ . Also gilt  $a = 1/r \in W'$ .

$W'$  ist nicht diskret, da für  $\epsilon > 0$  es ein  $n > 0$  gibt mit  $1/n < \epsilon$ , und somit  $1/n \in ]0 - \epsilon, 0 + \epsilon[ \cap W' \neq \{0\}$ .  $\square$

**Aufgabe 6.3\*** [Topologie von  $\mathbb{R}$  – Teil II; 8 Punkte] Sei  $X \subset \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

(a) Ist  $X$  abgeschlossen und nach oben beschränkt, so hat  $X$  ein Maximum.

*Beweis.* [2 Punkte] Sei  $s = \sup(X)$ . Da  $X$  nach oben beschränkt ist existiert dieses Supremum, mit  $s < \infty$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gibt es  $a_n \in X$  mit  $s - a_n < 1/n$  (denn sonst gälte  $x \leq s - 1/n$  für alle  $x \in X$  und somit wäre  $s - 1/n$  eine obere Schranke von  $X$  – aber das kann nicht sein, da  $s$  die kleinste obere Schranke ist). Dann gilt  $|a_n - s| < 1/n$  und somit  $\lim_n a_n = s$ . Da  $X$  abgeschlossen ist folgt  $s \in X$ .  $\square$

(b)  $X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $\mathbb{R} \setminus X$  offen ist.

*Beweis.* [4 Punkte] Sei  $U := \mathbb{R} \setminus X$ . Wir zeigen die äquivalente Aussage, dass  $X$  genau dann *nicht* abgeschlossen ist, wenn  $U$  *nicht* offen ist.

Wenn  $U$  nicht offen ist, dann  $\exists u \in U : \forall \epsilon > 0 : ]u - \epsilon, u + \epsilon[ \not\subset U$ . Nun gilt  $]u - \epsilon, u + \epsilon[ \not\subset U$  genau dann, wenn  $\exists x \in X \cap ]u - \epsilon, u + \epsilon[$ . Wir wenden diese Beobachtung an auf  $\epsilon = 1/n$  und erhalten somit  $x_n \in X$  mit  $|x_n - u| < 1/n$ . Folglich gilt  $u = \lim_n x_n \notin X$  und  $X$  ist nicht abgeschlossen.

Wenn  $X$  nicht abgeschlossen ist, dann existiert eine konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in X$  und  $u := \lim_n x_n \in U$ . Für  $\epsilon > 0$  existiert demnach  $N$  mit  $|u - x_N| < \epsilon$ , also  $x_N \in ]u - \epsilon, u + \epsilon[$ . Folglich ist  $]u - \epsilon, u + \epsilon[ \not\subset U$  und  $U$  ist nicht offen.  $\square$

(c) Ist  $X$  diskret und abgeschlossen, dann konvergiert eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in X$  für alle  $n$  genau dann, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $a_n = a_N$  für alle  $n > N$ .

*Beweis.* [2 Punkte] Die Bedingung ist offensichtlich hinreichend.

Für Notwendigkeit, sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit  $a_n \in X$  für alle  $n$ . Dann gilt  $a := \lim_n a_n \in X$ , da  $X$  abgeschlossen ist. Da  $X$  diskret ist, gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $]a - \epsilon, a + \epsilon[ \cap X = \{a\}$ . Da  $a = \lim_n a_n$  gibt es  $N$  so dass für  $n \geq N$ ,  $|a_n - a| < \epsilon$ . Also gilt (für  $n \geq N$ )  $a_n \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \cap X = \{a\}$ , sprich  $a_n = a$ . Da dies für alle  $n \geq N$  gilt, haben wir  $a_n = a = a_N$  für alle  $n > N$ .  $\square$

**Aufgabe 6.4 (!)** [Partielle Summation; 8 Punkte] Für eine Folge  $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  reeller Zahlen schreiben wir  $(\Delta a)_0 := a_0$ , und  $(\Delta a)_k := a_k - a_{k-1}$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

- (i) Sei  $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der Partialsummen  $s_n := \sum_{l=0}^n a_l$ . Zeigen Sie, dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(\Delta s)_k = a_k = \sum_{l=0}^k (\Delta a)_l.$$

*Beweis.* [1 Punkt] Es gilt  $(\Delta s)_0 = a_0 = (\Delta a)_0$ , und für  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(\Delta s)_k = s_k - s_{k-1} = \sum_{l=0}^k a_l - \sum_{l=0}^{k-1} a_l = a_k,$$

sowie

$$\sum_{l=0}^k (\Delta a)_l = a_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_k - a_{k-1} = a_k.$$

Eine Summe dieser Form nennt man auch *Teleskopsumme*. □

- (ii) Sei  $b := (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine weitere Folge reeller Zahlen und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^n (\Delta a)_k b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=1}^n a_{k-1} (\Delta b)_k. \quad (*)$$

*Beweis.* [2 Punkte] Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\Delta a)_k b_k &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_{k-1} b_k \\ &= a_n b_n + \sum_{k=2}^n a_{k-1} b_{k-1} - \sum_{k=1}^n a_{k-1} b_k \\ &= a_n b_n - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_{k-1} b_{k-1} - \sum_{k=1}^n a_{k-1} b_k \\ &= a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=1}^n a_{k-1} (b_k - b_{k-1}), \end{aligned}$$

was genau der rechten Seite von (\*) entspricht, denn  $b_k - b_{k-1} = (\Delta b)_k$ . □

- (iii) Berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ . [Tipp: Was ist  $(\Delta a)_k$ , wenn  $a_k = \frac{1}{k+1} \forall k \in \mathbb{N}_0$ ?

*Beweis.* [1 Punkt] Sei  $a_k = \frac{1}{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , dann gilt  $(\Delta a)_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{-1}{k(k+1)}$ . Also

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = - \sum_{k=1}^n (\Delta a)_k = a_0 - \sum_{k=0}^n (\Delta a)_k \stackrel{(i)}{=} a_0 - a_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

und damit  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ . □

(iv) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $C := \sup \{ |\sum_{k=0}^n a_k| : n \in \mathbb{N}_0 \} < \infty$ .  
Weisen Sie nach, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$$

konvergiert. [Tipp: Ist  $(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge?]

*Beweis.* [4 Punkte] Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen  $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1}$  eine Cauchy-Folge ist. Hierzu wollen wir (\*) aus (ii) mit  $b_k := \frac{1}{k+1}$  anwenden (Erinnerung aus (iii):  $(\Delta b)_k = \frac{-1}{k(k+1)}$ ). Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge definiert durch  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k$ , denn dann ist  $a_k = (\Delta c)_k$ . Aus der Angabe folgt außerdem, dass  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  beschränkt ist, d.h. es gibt eine Konstante  $C > 0$ , sodass  $|c_n| \leq C < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Es gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n (\Delta c)_k b_k \stackrel{(ii)}{=} c_n b_n - c_0 b_0 - \sum_{k=1}^n c_{k-1} (\Delta b)_k = c_n b_n - a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{c_{k-1}}{k(k+1)}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Da  $|c_n b_n| \leq \frac{C}{1+n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , konvergiert die Folge  $(c_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (gegen 0), ist also insbesondere eine Cauchy-Folge. Wir können somit  $N_1 \in \mathbb{N}$  wählen, sodass  $|c_n b_n - c_m b_m| < \varepsilon/2$  für alle  $n > m \geq N_1$ .

Aus (iii) wissen wir, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  konvergiert, sie (die Folge der Partialsummen) ist also auch eine Cauchy-Folge, d.h. es gibt ein  $N_2 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{für alle } n > m \geq N_2.$$

Setzen wir nun  $N := \max\{N_1, N_2\}$ , dann erhalten wir aus der Dreiecksungleichung

$$|s_n - s_m| \leq |c_n b_n - c_m b_m| + \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{c_{k-1}}{k(k+1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} < \varepsilon$$

für alle  $n > m \geq N$ . □

**(!)** Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

\* Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.