MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 6
19.11.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 6.1 [Konvergenz von $n^{1/n}$; 8 Punkte] *Zeigen Sie:*

(*i*) $(1+b)^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}b^2$, für alle $b \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$ [*Tipp:* Binomischer Satz]

(*ii*) $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Aufgabe 6.2 [Topologie von $\mathbb{R}$ – Teil I; 8 Punkte] Für eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ sagen wir:

- X ist *offen*, wenn $\forall x \in X \exists \epsilon > 0 :\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset X$,
- X ist *abgeschlossen*, wenn für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$, auch $\lim_{n\to\infty} a_n \in X$,
- X ist *diskret*, wenn $\forall x \in X\ \exists \epsilon > 0 :\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap X = \{x\}$.

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche sinde abgeschlossen, welche diskret? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(*i*) $X =]0,1[$ (*iii*) $Z =]0,1]$ (*v*) $W = \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$

(*ii*) $Y = [0,1]$ (*iv*)* $\mathbb{Z}$ (*vi*)* $W \cup \{0\}$

Aufgabe 6.3* [Topologie von $\mathbb{R}$ – Teil II; 8 Punkte] Sei $X \subset \mathbb{R}$. *Zeigen Sie:*

(a) Ist X nichtleer, abgeschlossen und nach oben beschränkt, so hat X ein Maximum.

(b) X ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathbb{R} \setminus X$ offen ist.

(c) Ist X diskret und abgeschlossen, dann konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n = a_N$ für alle $n > N$.

Aufgabe 6.4 (!) [Partielle Summation; 8 Punkte] Für eine Folge $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen schreiben wir $(\Delta a)_0 := a_0$, und $(\Delta a)_k := a_k - a_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(*i*) Sei $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{l=0}^{n} a_l$. *Zeigen Sie*, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(\Delta s)_k = a_k = \sum_{l=0}^{k} (\Delta a)_l \,.$$

(*ii*) Sei $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine weitere Folge reeller Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. *Zeigen Sie:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta a)_k \; b_k \;=\; a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} (\Delta b)_k \,.$$

(*iii*) *Berechnen Sie* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. [Tipp: Was ist $(\Delta a)_k$, wenn $a_k = \frac{1}{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}_0$?]

(*iv*) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $C := \sup\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \;:\; n \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty$. *Weisen Sie nach*, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$$

konvergiert. [*Tipp:* Ist $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge?]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die jeweilige Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens zum **Dienstag, den 26.11.2013, 18:00 Uhr**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/