Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 5

Aufgabe 5.1 [Binomischer Satz; 8 Punkte] Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen schreiben wir $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + \cdots + a_n$. *Zeigen Sie:*

(a) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,, \tag{$A(n)$}$$

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 \leqslant k \leqslant n$ in Aufgabe 2.4 eingeführt wurden.

Beweis. [4 Punkte] Für $n = 1$ ergibt die rechte Seite $\binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = b{+}a$, ist also gleich der linken Seite für $n = 1$, $A(1)$ ist also wahr. Angenommen $A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &\overset{A(n)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1=\binom{n+1}{n+1}} a^{n+1}b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{\overset{2.4}{=}\binom{n+1}{k}}a^kb^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}\,,
\end{aligned}$$

□

Alternativer Beweis. [4 Punkte] Es gilt $(a+b)^n = \sum_k C_k a^k b^{n-k}$ mit entsprechenden Koeffizienten $C_k \geqslant 0$, denn $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$ ausmultipliziert ergibt eine Summe von Binomen von Grad n in a und b, d.h. Terme der Form a^kb^{n-k} mit $0 \leqslant k \leqslant n$. Der Koeffizient C_k ist genau die Anzahl von Binomen die man erhält, in denen a genau k-mal vorkommt. Aber die beim Ausmultiplizieren entstandenen Terme sind bijektiv zu Untermengen von $\{1, ..., n\}$, wenn die Wahl einer Untermenge $X = \{i_1, ..., i_k\}$ aussagt, dass wir in den Klammern $i_1, ..., i_k$ a wählen, und in den anderen Klammern b. In dieser Bijektion korrespondieren die Terme a^kb^{n-k} genau mit den k-elementigen Untermengen. Ergo ist C_k die Anzahl k-elementiger Untermengen von $\{1, ..., n\}$, und das ist per Definition genau der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$. □

Bemerkung: In dieser Art von Beweis müssen die Formulierungen sehr sorgfältig gewählt werden, damit alle Aussagen exakt und logisch verknüpft sind.

(b) Es gilt $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

Beweis. [1 Punkt] Wir benutzen den binomischen Satz mit $a = 1$ und $b = -1$:

$$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

□

(c) Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine beliebige Anzahl von Elementen auszuwählen, ist gegeben durch $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$, wobei die Möglichkeit *kein Element* zu wählen nicht mitgezählt wird.

[*Tipp:* Überlegen Sie sich, wie die Fragestellung lautet, wenn man sie mithilfe der Mächtigkeit der Potenzmenge einer n-elementigen Menge formuliert.]

Beweis 1. [3 Punkte] Da die gesuchte Anzahl von Auswahlmöglichkeiten gerade der Mächtigkeit der Potenzmenge einer n-elementigen Menge entspricht, wenn man die leere Menge (keine Auswahl) herauslässt, gibt es nach Aufgabe 2.1a genau $2^n - 1$ solche Möglichkeiten. Der binomische Satz liefert

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

und damit erhalten wir $2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$ für die gesuchte Anzahl. □

Beweis 2 (alternativ). [3 Punkte] Per Definition der Binomialkoeffizienten (siehe Blatt 2), ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine *beliebige* Anzahl ($\neq 0$) von Elementen auszuwählen, ist also

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$$

□

Aufgabe 5.2 (!) [Konvergenz; 8 Punkte]

(a) Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$, welche divergiert? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben sie den Grenzwert an, falls dieser existiert.

(*i*) $a_n := 2^{-n}\, n$ [*Tipp:* Zeigen Sie zunächst $n^2 \leqslant 2^n$ für alle $n > 3$.]

Beweis. [Insg. 2 Punkte] Um die Ungleichung $n^2 \leqslant 2^n$ für alle $n > 3$ zu zeigen, beweisen wir zuerst, dass

$$2n + 1 \leqslant 2^n \quad \text{für alle } n > 3 \tag{$*$}$$

Es gilt $2\cdot 4+1 = 9 < 16 = 2^4$. Außerdem, $2(n+1)+1 \leqslant 2^n+2 \leqslant 2^n+2^n = 2^{n+1}$, falls $2n + 1 \leqslant 2^n$. $(*)$ ist damit bewiesen.
Zurück zu $n^2 \leqslant 2^n$ für alle $n > 3$: Es gilt $4^2 = 16 = 2^4$, d.h. die Aussage ist für $n = 4$ wahr. Sei nun $n^2 \leqslant 2^n$ für ein n. Es folgt

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant 2^n + 2n + 1 \overset{(*)}{\leqslant} 2^n + 2^n = 2^{n+1},$$

dabei ist die erste Ungleichung die Induktionsannahme. [1 Punkt]

Kommen wir zur Konvergenz von a_n. Wegen $n^2 \leqslant 2^n$ gilt $0 < a_n = \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$ für alle $n > 3$. Definieren wir $\tilde{a}_1 := \tilde{a}_2 := \tilde{a}_3 := 0$, $\tilde{a}_n = a_n$ für alle $n > 3$, dann folgt

$$0 \leqslant \tilde{a}_n \leqslant \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist (siehe Satz 2.6) konvergiert $\tilde{a}_n$ nach Satz 2.15 ebenfalls gegen 0. Wir schließen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = 0$. [1 Punkt] $\square$

(ii) $a_n := (1+x)^n$, wobei $x > 0$.

Beweis. [1 Punkt] Bernoulli's Ungleichung liefert $a_n = (1+x)^n \geqslant 1+xn$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $1+xn \to \infty$ für $n \to \infty$, kann a_n somit nicht konvergieren (warum?). $\square$

(iii) $a_n := |1+\frac{i}{n}|$

Beweis. [1 Punkt] Die Konvergenz gegen 1 haben wir bereits in Aufgabe 4.3(ii) gezeigt (zur Erinnnerung: $||1 + \frac{i}{n}| - 1| \leqslant |\frac{i}{n}| = \frac{1}{n}$) $\square$

(b) In dieser Aufgabe konstruieren wir eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, also $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert, d.h. ihr (nach Satz 2.18 existierender) Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ liegt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Hierzu definieren wir rekursiv

$$a_1 = 2\,, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(i) $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt. [*Tipp:* Induktion.]

Beweis. [1 Punkt] Da $a_1 > 0$ und $a_{n+1} > 0$, falls $a_n > 0$, folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend [*Tipp:* Zeigen Sie zunächst $a_n^2 \geqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.]

Beweis. [1 Punkt] Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1}^2 = \tfrac{1}{4}\left(a_n^2 + 4 + \tfrac{4}{a_n^2}\right) = 2 + \tfrac{1}{4}\left(a_n^2 - 4 + \tfrac{4}{a_n^2}\right) = 2 + \tfrac{1}{4}\underbrace{\left(a_n - \tfrac{2}{a_n}\right)^2}_{>0} \geqslant 2$$

Da $a_1 = 2$ gilt somit $a_n^2 \geqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Vorsicht: Hier wurde *keine* vollständige Induktion benutzt!). Wir schließen $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2) \geqslant 0$. $\square$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ [*Tipp:* Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.]

Beweis. [2 Punkte] Aus *(i)* und *(ii)* folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Nach Satz 2.18 ist die Folge somit konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$ (wegen $a_n^2 \geqslant 2 \forall n$ ist a sogar positiv). Da $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, konvergiert diese ebenfalls gegen a. Es gilt deshalb nach Satz 2.12

$$0 = a - a = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2) \overset{a\geq 0}{=} \tfrac{1}{2a}(a^2 - 2)$$

Also $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Insbesondere konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{Q}$, obwohl $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge sowohl monoton fällt als auch beschränkt ist, d.h. Satz 2.18 gilt nicht in $\mathbb{Q}$. Dies zeigt, dass die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes ist. $\square$

Aufgabe 5.3 (!) [8 Punkte]

(*i*) Zeigen Sie die *Dreiecksungleichung für endliche Summen:* Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \tag{$D(n)$}$$

Beweis. [2 Punkte] $D(1)$ ist trivial erfüllt (Gleichheit). Angenommen $D(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \overset{D(n)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|\,,$$

wobei in der ersten Ungleichung die bekannte Dreiecksungleichung für den Betrag komplexer Zahlen benutzt wurde. □

(*ii*) *Zeigen Sie:* Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, ebenfalls gegen a.

[*Tipp:* Wählen Sie in Abhängigkeit eines gegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, die aus der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hervorgeht und zerlegen Sie S_n in eine Summe über 1 bis $N-1$ und den Rest.]

Beweis. [5 Punkte] Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|S_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ (Definition der Konvergenz von S_n gegen a). Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, können wir $N_1 \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N_1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|S_n - a| &= \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \overset{(i)}{\leqslant} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k - a|}_{=:C(N_1)<\infty} + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\underbrace{|a_k - a|}_{<\varepsilon/2} < \frac{1}{n}C(N_1) + \underbrace{\frac{n-N_1}{n}}_{<\,1}\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

für alle $n > N_1$. Ist $C(N_1) = 0$, dann sind wir fertig; wir nehmen also $C(N_1) \neq 0$ an. Da $C(N_1)$ nicht von n abhängt, und $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, können wir $N_2 \in \mathbb{N}$ finden, sodass $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2C(N_1)}$ für alle $n > N_2$. Wir setzen $N := \max\{N_1, N_2\}$ (denn so impliziert $n > N$ immer $n > N_1$ sowie $n > N_2$). Es folgt für alle $n > N$

$$|S_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C(N_1)}C(N_1) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $|S_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$. □

[**Wichtige Bemerkung:** *Sollte Ihnen der Beweis dieser Aufgabe schwer gefallen sein, so versuchen Sie unbedingt die Struktur des obigen Beweises nachzuvollziehen, denn Beweistechniken dieser Art bilden den Kern der elementaren Analysis.*]

(*iii*) Finden Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und beweisen Sie die Konvergenz.

Beweis. [1 Punkt] Sei beispielsweise $a_n = (-1)^{n+1}$. Dann nimmt $\sum_{k=1}^n a_n$ immer abwechselnd die Werte 1 und 0 an. Also $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k| < \frac{1}{n}$, und daher ist $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

Aufgabe 5.4* [Cantors Diagonalargument; 8 Punkte]

(*i*) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gibt.

Beweis. [3 Punkte] Aufgabe 2.2(c)(i) und 2.2(c)(ii) liefern uns eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Komposition dieser Bijektion mit der evidenten Surjektion $\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ als

$$f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}.$$

Sei nun $x \in \mathbb{Q}$. Die Menge $f^{-1}(\{x\}) \subset \mathbb{N}$ ist nicht leer (da f surjektiv ist) und hat daher genau ein kleinstes Element (siehe 2.1(b)), das wir $g(x)$ nennen. So definieren wir eine Abbildung

$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N},$$

und per Konstruktion gilt $f \circ g = id_{\mathbb{Q}}$. Folglich ist g injektiv. Sei $X = g(\mathbb{Q})$. Dann ist $g : \mathbb{Q} \to X$ eine Bijektion. Darüber hinaus gilt $X \subset \mathbb{N}$ und $|X| = |\mathbb{Q}| = \infty$. Es folgt somit aus 2.2(c)(iii), dass X bijektiv zu $\mathbb{N}$ ist. Daher ist auch $\mathbb{Q}$ bijektiv zu $\mathbb{N}$.

Eine direkte Abzählung, ähnlich Aufgabe 2.2(c)(ii), ist natürlich auch möglich. □

(*ii*) Zeigen Sie, dass es keine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ gibt.

[*Tipp*: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Nutzen Sie die Aufgaben 2.2(c)(iii) und 4.4, um eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to X_{10}$ zu konstruieren. Wir schreiben $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots)$. Wählen Sie eine Funktion $s : \{0, 1, \dots, 8, 9\} \to \{0, 1, \dots, 8\}$, mit $s(x) \neq x$ für $x = 0, \dots, 9$. Definieren Sie $a_n = s(g_n(n))$ und zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{10}\setminus f(\mathbb{N})$.]

Beweis. [5 Punkte] Wir verwenden einen Widerspruchsbeweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist $h : X_{10} \xrightarrow{4.4} [0, 1) \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ eine Injektion (Komposition von Bijektion und Injektion). Folglich ist $h(X) \subset \mathbb{N}$ unendlich und somit bijektiv zu $\mathbb{N}$ (2.2(c)(iii)). Damit erhalten wir eine Bijektion $X_{10} \to \mathbb{N}$ und schreiben g für ihre Umkehrung.

g ordnet jeder natürlichen Zahl einen (unendlichen) Dezimalbruch

$$g(n) = 0.g_1(n)g_2(n)g_3(n)\dots$$

zu. Es sei $s : \{0, 1, \dots, 9\} \to \{0, 1, \dots, 8\}$ die Abbildung mit $s(0) = 1$ und $s(a) = a - 1$ für $a \neq 0$. Dann gilt insbesondere $s(a) \neq a$ für alle Ziffern a.

Wir betrachten nun den Dezimalbruch

$$y = 0.s(g_1(n))\,s(g_2(n))\,s(g_3(n))\dots \in X_{10}.$$

(Es gilt tatsächlich $y \in X_{10}$, da y die Ziffer 9 nicht enthält, und somit auch nicht in 9 terminieren kann.) Ich behaupte $y \neq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Tatsächlich gilt $g_n(n) \neq s(g_n(n))$, und somit auch $g(n) \neq y$ ("die nte Dezimalziffer ist verschieden"). Aber g sollte eine Bijektion und somit insbesondere surjektiv sein – Widerspruch. □