Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 5
12.11.2013

Übungen zur Analysis 1
für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 5.1 [Binomischer Satz; 8 Punkte] Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen schreiben wir $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + \cdots + a_n$. *Zeigen Sie:*

(a) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,,$$

wobei die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 \leqslant k \leqslant n$ in Aufgabe 2.4 eingeführt wurden.

(b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \;= 0\,.$$

(c) Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine beliebige Anzahl von Elementen auszuwählen, ist gegeben durch $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$, wobei die Möglichkeit *kein Element* zu wählen nicht mitgezählt wird.

[*Tipp:* Überlegen Sie sich, wie die Fragestellung lautet, wenn man sie mithilfe der Mächtigkeit der Potenzmenge einer n-elementigen Menge formuliert.]

Aufgabe 5.2 (!) [Konvergenz; 8 Punkte]

(a) Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$, welche divergiert? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben sie den Grenzwert an, falls dieser existiert.

(*i*) $a_n := 2^{-n}\, n$ [*Tipp:* Zeigen Sie zunächst $n^2 \leqslant 2^n$ für alle $n > 3$.]

(*ii*) $a_n := (1+x)^n$, wobei $x > 0$.

(*iii*) $a_n := |1+\frac{i}{n}|$

(b) In dieser Aufgabe konstruieren wir eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, also $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert, d.h. ihr (nach Satz 2.18 existierender) Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ liegt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Hierzu definieren wir rekursiv

$$a_1 = 2\,, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(i) $a_n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt. [*Tipp:* Induktion.]

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend [*Tipp:* Zeigen Sie zunächst $a_n^2 \geqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.]

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ [*Tipp:* Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.]

Aufgabe 5.3 (!) [8 Punkte]

(*i*) Zeigen Sie die *Dreiecksungleichung für endliche Summen:* Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

(*ii*) *Zeigen Sie:* Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, ebenfalls gegen a.

[*Tipp:* Wählen Sie in Abhängigkeit eines gegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, die aus der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hervorgeht und zerlegen Sie S_n in eine Summe über 1 bis $N-1$ und den Rest.]

(*iii*) Finden Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und beweisen Sie die Konvergenz.

Aufgabe 5.4* [Cantors Diagonalargument; 8 Punkte]

(*i*) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gibt.

(*ii*) Zeigen Sie, dass es keine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ gibt.

[*Tipp*: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Nutzen Sie die Aufgaben 2.2(*c*)(*iii*) und 4.4, um eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to X_{10}$ zu konstruieren. Wir schreiben $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots)$. Wählen Sie eine Funktion $s : \{0, 1, \dots, 8, 9\} \to \{0, 1, \dots, 8\}$, mit $s(x) \neq x$ für $x = 0, \dots, 9$. Definieren Sie $a_n = s(g_n(n))$ und zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{10} \setminus f(\mathbb{N})$.]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Hinweis: Sie sind berechtigt die Übungsblätter auch in größeren Gruppen zu bearbeiten. Anschließend sollte allerdings jede Kleingruppe (bestehend aus 2-3 Studenten) eine eigenständige Lösung verfassen. Die Korrektoren werden abgeschriebene Lösungen erkennen und die **erreichte Punktzahl unter allen identischen Abgaben aufteilen**. Beachten Sie, dass dabei abgeschriebene und originale Lösungen nicht unterschieden werden können.

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens zum **Dienstag, den 19.11.2013, 18:00 Uhr**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/