Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
Lösung 4
05.11.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 4

Aufgabe 4.1 (!) [Beschränktheit; 8 Punkte] Welche der folgenden Mengen sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Was ist die kleinste obere bzw. größte untere Schranke?

(*i*) $X = \{1, 2, 3\}$

(*ii*) $Y = \{m/n \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$

(*iii*) $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

Lösung.

(i) Die Menge X ist nach oben und unten beschränkt, kleinste obere Schranke 3, größte untere Schranke 1. [2 Punkte]

(ii) Da $\mathbb{N} \subset Y$ und $\sup \mathbb{N} = \infty$ ist Y nicht nach oben beschränkt. Da $x \in Y \implies x > 0$ ist Y nach unten beschränkt. Da $1/n \in Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\inf\{1/n | n \in \mathbb{N}\} = 0$ ist 0 die größte untere Schranke. [2 Punkte]

(iii) Da $-Z = Z$ gilt $\inf Z = -\sup Z$. Da $x > 2 \implies x^2 > 4$ gilt $s := \sup Z \leq 2 < \infty$. Die Menge Z ist also nach oben und unten beschränkt, mit kleinster oberer Schranke s und größter unterer Schranke $-s$.

Beh.: s ist die einzige positive reelle Zahl mit $s^2 = 2$, also "$s = \sqrt{2}$". Eindeutigkeit ist klar, denn $s \mapsto s^2$ ist streng monoton steigend auf $(0, \infty)$. Wir nehmen nun an, dass $s^2 \neq 2$.

Möglichkeit 1: $s^2 > 2$. Wir schreiben $s^2 = 2 + \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$, $(s - \epsilon)^2 = s^2 - 2s\epsilon + \epsilon^2 = 2 + \delta - \epsilon(2s - \epsilon)$. Für $\epsilon = \delta/(2s)$ gilt $\delta > \epsilon(2s - \epsilon)$ und somit $(s - \epsilon)^2 > 2$. Dann impliziert $z^2 < 2$, dass $|z| < s - \epsilon$, also ist s *nicht* kleinste obere Schranke von s (da $s - \epsilon$ eine obere Schranke ist). Widerspruch.

Möglichkeit 2: $2 - \delta := s^2 < 2$. Dann gilt $(s+\epsilon)^2 = s^2 + 2s\epsilon + \epsilon^2 = 2 - \delta + \epsilon(2s + \epsilon) < 2$ für $\epsilon = \min(\delta/5, 1)$ (da $s < 2$). Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt existiert $y \in \mathbb{Q}$ mit $s < y < s + \epsilon$. Dann haben wir $y^2 < (s+\epsilon)^2 < 2$ und somit $y \in Z$. Folglich ist s *keine* obere Schranke von Z. Widerspruch. Es muss also $s^2 = 2$ gelten. [4 Punkte] □

Aufgabe 4.2 [Graphen; 8 Punkte] Seien X und Y Mengen. Wir schreiben Y^X für die Menge aller Funktionen von X nach Y. Ist $f : X \to Y$ so eine Funktion, so schreiben wir $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$ für den *Graphen* von f. *Zeigen Sie:*

(*i*) Sind X und Y endlich, dann gilt $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

Beweis. Wir beobachten zunächst: Sind A und B endliche Mengen, dann gilt offenbar $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Um $\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$ zu beweisen, benutzen wir Induktion auf $|X|$. Für $|X| = 0$ ist $X = \emptyset$ und somit gibt es genau eine Funktion $X \to Y$. Daher gilt $\left|Y^X\right| = 1 = |Y|^0$.

Sei nun $|X| = n + 1 > 0$. Dann $\exists x_0 \in X$ und wir schreiben $X' = X \setminus \{x_0\}$. Für $f \in Y^X$ sei $\alpha(f) = (f|_{X'}, f(x_0)) \in Y^{X'} \times Y$. Umgekehrt sei für $(f', y) \in Y^{X'} \times Y$ eine funktion $\beta(f) \in Y^X$ definiert durch $\beta(f)(x) = f'(x)$, wenn $x \in X'$ und $\beta(f)(x_0) = y$. Dann überprüft man leicht, dass α und β invers zueinander sind.

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\left|Y^X\right| &= \left|Y^{X'} \times Y\right| \\
&= \left|Y^{X'}\right| \cdot |Y| \\
&= |Y|^{|X'|} \cdot |Y| \\
&= |Y|^{|X'|+1} \\
&= |Y|^{|X|}.
\end{aligned}$$

Hier gilt die erste Gleichheit aufgrund der Bijektivität von α, die zweite aufgrund der Beobachtung vom Anfang, und die dritte aufgrund der Induktionshypothese.

Dies schließt den Beweis des Induktionsschrittes ab. [5 Punkte] □

(*ii*) Die Abbildung $\Gamma : Y^X \to P(X \times Y), f \mapsto \Gamma_f$ ist injektiv. Charakterisieren Sie das Bild $\Gamma(Y^X)$.

Beweis. Seien $f, g : X \to Y$. Wenn $\Gamma_f = \Gamma_g$ und $x \in X$, dann gilt $(x, f(x)) \in \Gamma_f = \Gamma_g$, also $(x, f(x)) = (x', g(x'))$ für ein $x' \in X$. Aber dann $x = x'$, und somit $f(x) = g(x)$. Da x beliebig war gilt $f = g$ und somit ist Γ injektiv. [2 Punkte]

Eine Menge $S \subset X \times Y$ ist Graph einer Funktion genau dann, wenn $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : (x, y) \in S$. [1 Punkt] □

Aufgabe 4.3 (!) [Komplexe Zahlen; 8 Punkte] *Zeigen Sie:*

(*i*) Der komplexe Betrag ist *stetig*, d.h.

$$\forall \varepsilon{>}0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall z, w \in \mathbb{C} : \ |z - w| < \delta \ \Rightarrow \ \big||z| - |w|\big| < \varepsilon$$

Beweis. [2 Punkte] Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Wir zeigen zunächst die *umgekehrte Dreiecksungleichung* $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $|x + y| - |y| \leqslant |x|$, nach der Dreiecksungleichung für den Betrag komplexer Zahlen. Für $x = z - w$ und $y = w$ folgt also $|z| - |w| \leqslant |z - w|$. Wählen wir stattdessen $y = -z$, so folgt $|w| - |z| \leqslant |z - w|$. Es folgt also insgesamt die umgekehrte Dreiecksungleichung. Sei nun $\varepsilon > 0$, dann setzen wir $\delta := \varepsilon$. Dann folgt für $|z - w| < \delta$, dass $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w| < \delta = \varepsilon$. □

(*ii*) $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \big||1{+}\frac{i}{n}| - 1\big| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N.$

Beweis. [2 Punkte] Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.61 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Also $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Wegen $|i| = \sqrt{-i^2} = 1$ gilt $|1{+}\frac{i}{n} - 1| = |\frac{i}{n}| = \frac{1}{n}$, und darum mit der umgekehrten Dreiecksungleichung $||1{+}\frac{i}{n}| - 1| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. □

(*iii*) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

[*Tipp:* Was können Sie über $(1{+}a)^n$ aussagen? Sie dürfen verwenden, dass es für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $nx > y$.]

Beweis. [2 Punkte] Sei $\varepsilon > 0$. Da $a := \frac{1}{b}{-}1 > 0$, folgt aus der Bernoulli-Ungleichung, dass $(1{+}a)^n \geqslant 1{+}na$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $na > \varepsilon^{-1}{-}1$. Zusammen folgt $(b^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$, also $b^n < \varepsilon$. □

(*iv*) $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \left|\frac{1}{(2+i)^n}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N.$

Beweis. [2 Punkte] Zunächst folgt aus $|z{\cdot}w| = |z||w|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ per Induktion, dass $|z^n| = |z|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genauso folgt $(z^n)^{-1} = (z^{-1})^n$ aus $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$. Darum gilt $\left|\frac{1}{(2+i)^n}\right| = \left|\frac{1}{2+i}\right|^n$, wobei

$$0 \ < \ \left|\frac{1}{2{+}i}\right| = \left|\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}\right| = \left|\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \ < \ 1$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen $0 < |\frac{1}{2+i}| < 1$ gibt es nach (*iii*) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{2+i}|^N < \varepsilon$, und somit $|\frac{1}{2+i}|^n < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ (hierbei haben wir benutzt, dass für jedes $0 < b < 1$ gilt $b^m < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und darum $b^n \leqslant b^N$ für alle $n \geqslant N$). □

Aufgabe 4.4* [Dezimaldarstellung; 8 Punkte] Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und fixieren eine natürliche Zahl $b \geqslant 2$. Sei

$$M_b \ := \ \big\{(a_1, a_2, \dots) \,\big|\, \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{N}_0 \wedge a_i < b\big\},$$

d.h. M_b ist die Menge aller *Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_1, a_2, \dots)$ natürlicher Zahlen a_i, wobei $0 \leqslant a_i < b$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *terminierend*, wenn die Folgenglieder irgendwann nur noch denselben Wert annehmen, d.h. wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n = a_{n_0}$ für alle $n \geqslant n_0$. Weiter, sei

$$X_b \ := \ \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_b \,\big|\, a_n \text{ terminiert nicht in } b-1\big\},$$

d.h. für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_b$ gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_b$ genau dann, wenn $\forall m\, \exists n{>}m : a_n \neq b{-}1$. *Zeigen Sie*, dass die Abbildung

$$f : M_b \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup\left\{\frac{a_1}{b} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

die Menge $X_b \subset M_b$ bijektiv auf $[0, 1)$ abbildet. [*Tipp:* Gehen Sie für die Surjektivität ähnlich vor, wie im Beweis von Satz 1.65]

Beweis. Wir schreiben $x = 0.a_1a_2a_3...$ für $(a_n)_n \in X_b$. Wenn $a_i = 0$ für $i > n$ dann ist $f(x) = a_1/b + \dots a_n/b^n$ eine rationale Zahl kleiner als 1: es gilt $a_1/b + \dots a_n/b^n < (b-1)/b + \dots + (b-1)/b^n \leq \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-1/b} = 1$, wobei die letzte Ungleichung aus Aufgabe 3.4 folgt.
Für beliebige $x = 0.a_1a_2 \dots \in X_b$ gilt $a_i \leq b-1$ für alle i und außerdem $a_i < b-1$ für mindestens ein i. Sei i_0 ein solches, also $a_{i_0} < b-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&a_1/b + \dots + a_{i_0}/b^{i_0} + \dots + a_n/b^n \\
&\leq a_1/b + \dots + a_{i_0}/b^{i_0} + (b-1)/b^{i_0+1} + \dots + (b-1)/b^n \\
&= a_1/b + \dots + a_{i_0}/b^{i_0} + (b-1)/b^{i_0+1}(1 + 1/b + \dots + 1/b^{n-i_0-1}) \\
&\leq a_1/b + \dots + a_{i_0}/b^{i_0} + (b-1)/b^{i_0+1}\frac{1}{1-1/b} \\
&= a_1/b + \dots + a_{i_0}/b^{i_0} + 1/b^{i_0} \\
&= a_1/b + \dots + (a_{i_0}+1)/b^{i_0}
\end{aligned}$$

Hierbei folgt die dritte Zeile aus der zweiten durch Aufgabe 3.4. Folglich gilt $f(x) \leq f(0.a_1a_2 \dots (a_{i_0}+1)000 \dots) < 1$. Offenbar gilt $f(x) \geq 0$, und somit ist $f(X_b) \subset [0, 1)$. [2 Punkte]
Wir zeigen nun, dass $f : X_b \to [0, 1)$ eine Bijektion ist. Zunächst zeigen wir Injektivität. Seien $x = 0.a_1a_2 \dots \in X_b$ und $y = 0.b_1b_2 \dots \in X_b$ mit $x \neq y$, d.h. $\exists i : a_i \neq b_i$. Sei i_0 der kleinste Index mit $a_i \neq b_i$. Wir nehmen ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass $a_{i_0} < b_{i_0}$. Dann gilt für alle $n > i_0$

$$a_1/b + \dots + (a_{i_0}+1)/b^{i_0} \leq b_0/b + \dots + b_{i_0}/b^{i_0} + \dots + b_n/b^n$$

(da $a_i = b_i$ für $i < i_0$ und $b_{i_0} \geq a_{i_0} + 1$), und somit $f(0.a_1 \dots (a_{i_0}+1)) \leq f(y)$.
Wir haben im zweiten Absatz gesehen, dass $f(x) \leq f(0.a_1a_2 \dots (a_{i_0}+1)000 \dots)$. Ich behaupte, es gilt sogar strikte Ungleichheit. Da $(a_n)_n$ nicht in $b-1$ terminiert gibt es $i_1 > i_0$ mit $a_{i_1} \neq b-1$. Dann zeigt das Argument aus dem zweiten Absatz wieder, dass $f(x) \leq f(0.a_1 \dots a_{i_0} \dots (a_{i_1}+1)000 \dots)$. Aber offenbar gilt auch $f(0.a_1 \dots (a_{i_0} + 1)000 \dots) > f(0.a_1 \dots (a_{i_1}+1)000 \dots)$ (selbes Argument wie im ersten Absatz) und somit $f(x) < f(y)$. Folglich ist f injektiv. [3 Punkte]
Es bleibt noch, Surjektivität von f zu zeigen. Sei $y \in [0, 1)$. Wir konstuieren eine Folge $(a_n)_n$, induktiv wie folgt: Wir schreiben $A_1 = \{a \in \{0, 1, \dots, b-1\} | a/b \leq y\}$, $a_1 = \max A_1$ und $c_1 = a_1/b$.
Wenn $a_1, \dots, a_n$ zusammen mit $A_1, \dots A_n$ und $c_1, \dots, c_n$ konstruiert wurden, definieren wir

$$\begin{gathered}
A_{n+1} = \{a \in \{0, 1, \dots, b-1\} | a_1/b + \dots + a_n/b^n + a/b^{n+1} \leq y\} \\
a_{n+1} = \max A_{n+1} \\
c_{n+1} = c_n + a_{n+1}/b^{n+1}.
\end{gathered}$$

Wir sehen durch Induktion, dass $c_n = a_1/b + \dots + a_n/b^n \leq y$. Folglich ist A_{n+1} eine nicht-leere, endliche Menge, und hat somit ein Maximum. Daher sind $(a_n)_n$ wohldefiniert. Per konstruktion haben wir $c_n + 1/b^n > y$ und somit $y - 1/b^n \leq c_n \leq y$ Da $f(x) = \sup\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ gilt $f(x) = y$, wobei $x = 0.a_1a_2a_3 \dots \in M_b$ [da $1/b^n$ beliebig nah bei 0 liegt, vergleiche Aufgabe 3].
Schließlich untersuchen wir, ob $x \in X_b$. Wenn ja, ist $y \in f(X_b)$. Wenn nicht, terminiert (a_n) in $b-1$. Wenn $a_n = b-1$ für alle n dann gilt $y = f(x) = 1$ nach Aufgabe 3.4, ein

Widerspruch zu $y \in [0,1)$. Andernfalls (*) sei i_0 die größte natürliche Zahl mit $a_{i_0} \neq b-1$. Dann überprüfen wir mit Hilfe von Aufgabe 3.4 leicht, dass $f(x) = a_1 + \cdots + (a_{i_0}+1)/b^{i_0}$. Somit gilt $y = f(x) = f(0.a_1 \ldots a_{i_0-1}(a_{i_0}+1)00\ldots)$ und $y \in f(X_b)$.
Folglich ist f surjektiv. [3 Punkte]
Bemerkung: Man prüft auch leicht, dass der Fall (*) nie auftritt. Unsere Konstruktion der a_i definiert also eine Umkehrfunktion zu f. $\square$

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*