Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 4
05.11.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 4.1 (!) [Beschränktheit; 8 Punkte] Welche der folgenden Mengen sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Was ist die kleinste obere bzw. größte untere Schranke?

(*i*) $X = \{1, 2, 3\}$

(*ii*) $Y = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

(*iii*) $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

Aufgabe 4.2 [Graphen; 8 Punkte] Seien X und Y Mengen. Wir schreiben Y^X für die Menge aller Funktionen von X nach Y. Ist $f : X \to Y$ so eine Funktion, so schreiben wir $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$ für den *Graphen* von f. *Zeigen Sie:*

(*i*) Sind X und Y endlich, dann gilt $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

(*ii*) Die Abbildung $\Gamma : Y^X \to P(X \times Y), f \mapsto \Gamma_f$ ist injektiv. Charakterisieren Sie das Bild $\Gamma(Y^X)$.

Aufgabe 4.3 (!) [Komplexe Zahlen; 8 Punkte] *Zeigen Sie:*

(*i*) Der komplexe Betrag ist *stetig*, d.h.

$$\forall \varepsilon{>}0 \; \exists \delta > 0 : \quad \forall z, w \in \mathbb{C} : \; |z - w| < \delta \; \Rightarrow \; \big||z| - |w|\big| < \varepsilon$$

[*Tipp:* Zeigen Sie zunächst $\big||z|{-}|w|\big| \leqslant |z - w|$ mithilfe der Dreiecksungleichung.]

(*ii*) $\forall \varepsilon{>}0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \big||1{+}\tfrac{i}{n}| - 1\big| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$.

(*iii*) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

[*Tipp:* Betrachten Sie zunächst $a := \frac{1}{b} - 1$. Was können Sie über $(1{+}a)^n$ aussagen? Sie dürfen verwenden, dass es für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $nx > y$.]

(*iv*) $\forall \varepsilon{>}0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \left|\frac{1}{(2+i)^n}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$.

Aufgabe 4.4* [Dezimaldarstellung; 8 Punkte] Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und fixieren eine natürliche Zahl $b \geqslant 2$. Sei

$$M_b \ := \ \big\{(a_1, a_2, \dots) \,\big|\, \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{N}_0 \wedge a_i < b\big\}\,,$$

d.h. M_b ist die Menge aller *Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_1, a_2, \dots)$ natürlicher Zahlen a_i, wobei $0 \leqslant a_i < b$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *terminierend*, wenn die Folgenglieder irgendwann nur noch denselben Wert annehmen, d.h. wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n = a_{n_0}$ für alle $n \geqslant n_0$. Weiter, sei

$$X_b \ := \ \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_b \,\big|\, a_n \text{ terminiert nicht in } b-1\big\}\,,$$

d.h. für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_b$ gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_b$ genau dann, wenn $\forall m\, \exists n > m : a_n \neq b-1$. *Zeigen Sie*, dass die Abbildung

$$f : M_b \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,,\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup\left\{\frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

die Menge $X_b \subset M_b$ bijektiv auf $[0,1)$ abbildet. [*Tipp:* Gehen Sie für die Surjektivität ähnlich vor, wie im Beweis von Satz 1.65]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

* *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 12.11.2013**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/