Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 3
29.10.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 3.1 [Gruppen; 8 Punkte] Sei G eine Menge. Eine Abbildung $* : G \times G \to G$ bezeichnet man als *Verknüpfung* und man schreibt $a * b := *(a, b)$ (denken Sie beispielsweise an die Addition $a + b = +(a, b)$, welche dem Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Summe $a + b \in \mathbb{R}$ zuordnet).
Eine Menge G ausgestattet mit einer Verknüpfung $*$ heißt *Gruppe*, $(G, *)$, falls gilt

(i) $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$ (*Assoziativität*)

(ii) $\exists e \in G$ (*links-neutrales Element*), sodass $e * a = a\ \forall a \in G$

(iii) $\forall a \in G\ \exists b \in G$ (*links-inverses Element zu a*), sodass $b * a = e$.

Eine Gruppe $(G, *)$ heißt *abelsch* (oder *kommutativ*), falls

(iv) $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$

Sei nun $(G, *)$ eine Gruppe. *Zeigen Sie:*

(a) Ist $a \in G$, b ein links-inverses Element zu a und e ein links-neutrales Element von G, dann gilt $a * b = e$, sowie $a * e = a$. [*Hinweis:* Machen Sie in jedem Schritt in ihrer Lösung deutlich, welche der Eigenschaften (i)-(iii) Sie jeweils benutzen.]

(b) Es gibt nur ein links-neutrales Element. [*Hinweis:* Aus (a) folgt, dass dieses auch rechts-neutral ist; es wird deshalb *das neutrale Element der Gruppe* genannt].

(c) Für jedes $a \in G$ gibt es nur ein links-inverses Element. [*Hinweis:* Dies ist nach (a) auch rechts-invers zu a; es wird deshalb als *das inverse Element zu a* bezeichnet.]

(d) Für $a, b \in G$ gilt $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (*shoe-socks property*).

(e) Für $a \in G$ gilt: $(a^{-1})^{-1} = a$ (*Involutionseigenschaft*).

(f) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen. Identifizieren Sie jeweils das neutrale und die inversen Elemente. [*Tipp:* Definition von Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ aus der Vorlesung]

Aufgabe 3.2 [Symmetrische Differenz; 8 Punkte] Wir definieren die logische Verknüpfung, die einem *ausschließenden oder* (d.h. einem *entweder-oder*) entspricht, genannt *Kontravalenz* oder *XOR-Verknüpfung*, durch

$$A \veebar B \ := \ (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,,$$

wobei A, B zwei Aussagen bezeichnen. Weiter, sei für zwei Mengen M, N die *symmetrische Differenz* $M \Delta N$ definiert durch

$$M \Delta N \ := \ \big\{ x \,\big|\, (x \in M) \veebar (x \in N) \big\}\,.$$

(a) *Zeigen Sie:* $M \Delta N = (M \backslash N) \cup (N \backslash M)$.

(b) Sei X eine Menge. *Zeigen Sie:* $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ ist eine abelsche Gruppe. [*Tipp:* Benutzen Sie für die Assoziativität nicht (a).]

Aufgabe 3.3 [Relationen; 8 Punkte] Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $R \subset M \times M$ wird *Relation in* (oder *auf*) M genannt. In diesem Zusammenhang schreiben wir xRy für die Aussage $(x, y) \in R$.

(a) Machen Sie sich klar, dass eine Ordnungsrelation $\prec$ (siehe Def. 1.41) eine Relation ist und drücken Sie die Reflexivitäts-, Antisymmetrie- und Transitivitätsbedingungen in Elementschreibweise aus. [Beispiel: R ist *symmetrisch*, falls $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.]

Eine Relation heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann schreiben wir $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\}$ (*Äquivalenzklasse von* x), sowie $M/\!\sim\ := \{[x] \,|\, x \in M\}$.

(b) Finden Sie eine Äquivalenzrelation, die auf jeder Menge M definiert werden kann, und geben Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen an. [*Tipp:* Denken Sie an Cantors 'naive' Definition einer Menge als Zusammenfassung wohl... Objekte]

(c) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. *Zeigen Sie:* $M = \bigsqcup_{[x] \in M/\sim} [x]$, wobei mit $\bigsqcup$ die Vereinigung über paarweise disjunkte Mengen bezeichnet wird.

(d) Seien M, N nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung. *Zeigen Sie*, dass durch $x_1 \sim x_2 \;:\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$ eine Äquivalenzrelation auf M induziert wird, sowie, dass
$$\tilde{f} : M/\!\sim\ \to\ N, \quad \tilde{f}([x]) := f(x)$$
eine wohldefinierte Bijektion ist.

Aufgabe 3.4 [Geometrische Reihe; 8 Punkte] Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Folgern Sie:

(i) Für $0 \leqslant x < 1$ hat $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, \dots\}$ kleinste obere Schranke $\frac{1}{1-x}$.

(ii) Sind $m > 1, n > 1$ natürliche Zahlen, sodass $m^n - 1$ prim ist, dann gilt $m = 2$ und n ist prim. [Eine natürliche Zahl m heißt prim, wenn sie nur durch ± 1 und $\pm m$ restfrei teilbar ist.]

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens zum **Dienstag, den 05.11.2013, 18:00 Uhr**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/