Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte

WiSe 2013/14
Lösung 2
22.10.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 2

Aufgabe 2.1 [Mengen; 8 Punkte]

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und M eine Menge. Man schreibt $|M|$ für die *Mächtigkeit* von M, d.h. für die Anzahl an Elementen, die in M enthalten sind. *Zeigen Sie:*

$$|M| = n \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{P}(M)| = 2^n\,.$$

Beweis. [4 Punkte] Wir benutzen Induktion auf $|M| = n$. Für $|M| = 0$ (Hinweis: hier wird die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen, ursprünglich war nur $n \in \mathbb{N}$ gefragt) haben wir $M = \emptyset$, und somit $P(M) = \{\emptyset\}$. Also gilt $|P(M)| = 1 = 2^0$, und der Induktionsanfang ist bewiesen.

Für den Induktionsschritt sei M eine Menge, $|M| = n + 1$ (mit $n \geq 0$). Insbesondere gilt $M \neq \emptyset$, und somit $\exists x \in M$. Wir können nun schreiben

$$P(M) = A \cup B,$$

wobei $A = \{X \in P(M) | x \in X\}$ und $B = \{X \in P(M) | x \notin X\}$. Offenbar gilt $A \cap B = \emptyset$ und somit $|P(M)| = |A| + |B|$. Darüber hinaus haben wir $B = P(M \setminus \{x\})$, und die Abbildungen

$$\begin{aligned} A \to B, &\quad X \mapsto X \setminus \{x\} \\ B \to A, &\quad X \mapsto X \cup \{x\} \end{aligned}$$

sind invers zueinander. Daher gilt $|A| = |B| = |P(M\setminus\{x\})| = 2^n$ (letzteres nach Induktionshypothese) und somit $|P(M)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Das schließt den Beweis des Induktionsschrittes ab. $\square$

(b) *Zeigen Sie:* $\forall M \subset \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in M \ \forall n \in \mathbb{N} : (n < m \Rightarrow n \notin M))$

Beweis. [4 Punkte] In Worten: “Jede nicht-leere Menge natürlicher Zahlen hat genau ein kleinstes Element”.

Wir zeigen zunächst Existenz von kleinsten Elementen. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$. Dann $\exists n \in M$. Sei $M' = [n] \cap M$ (wobei $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, wie in Aufgabe 4). Dann ist $n \in M' \subset [n]$, und somit $1 \leq |M'| \leq n$. Wenn x ein kleinstes Element von M' ist, dann ist x offenbar auch ein kleinstes Element von M. Es ist somit hinreichend zu zeigen, dass jede *endliche* nicht-leere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat.

Sei nun $P(n)$ die Aussage

$$M \subset \mathbb{N} \wedge |M| = n \implies M \text{ hat ein kleinstes Element.}$$

Offenbar ist $P(1)$ wahr. Nehmen wir nun an, dass $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ alle wahr sind. Wir wollen zeigen, dass $P(n+1)$ auch wahr ist. Sei also $M \subset \mathbb{N}$ mit $|M| = n+1$. Dann $\exists x \in M$. Wenn $x = 1$ gibt es nichts zu beweisen. Andernfalls sei $M' = M \cap [x-1]$. Dann gilt $x \notin M'$, und somit $|M'| < |M|$. Wenn $|M'| = 0$ ist x ein kleinstes Element von M, und wir sind fertig. Andernfalls hat M' ein kleinstes Element y, da $P(|M'|)$ wahr ist. Dann ist offenbar y auch ein kleinstes Element von M. Somit ist $P(n+1)$ in allen Fällen wahr, und der Induktionsschritt ist bewiesen.

Es bleibt noch, die Eindeutigkeit kleinster Element zu zeigen. Aber wenn $x, y \in M$ kleinste Elemente sind, dann gelten $x \leq y$ und $y \leq x$, und daher $y = x$. $\square$

Aufgabe 2.2 [Abbildungen; 8 Punkte]

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.25 aus der Vorlesung, d.h. *zeigen Sie:* Ist $f : M \to N$ eine Abbildung, dann gilt für alle $A \subset M$ und $B, C \subset N$

(*i*) $A \subset f^{-1}(f(A))$

Beweis. [1 Punkt] Aus $x \in A$ folgt $f(x) \in f(A)$, und damit $x \in f^{-1}(f(A))$ (Def. 1.24). Also $A \subset f^{-1}(f(A))$. $\square$

(*ii*) $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$

Beweis. [1 Punkt] Es gilt $x \in f^{-1}(B \cup C) \Leftrightarrow f(x) \in B \cup C \Leftrightarrow (f(x) \in B) \vee (f(x) \in C) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B)) \vee (x \in f^{-1}(C)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$. $\square$

(b) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.28 aus der Vorlesung: *Zeigen Sie*, dass es zu jeder bijektiven Abbildung $f : M \to N$ eine eindeutige Abbildung $g : N \to M$ gibt, sodass $f \circ g = id$, d.h. $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$.

Beweis. [1 Punkt] Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Da f injektiv ist, ist dieses $x =: x_y$ eindeutig durch y bestimmt. Sei nun $g : N \to M$ definiert durch $g(y) = x_y$. Dann ist g eine Abbildung (da x_y eindeutig durch y bestimmt ist) und es gilt $f(g(y)) = f(x_y) = y$, d.h. $f \circ g = id_N$. $\square$

(c) Zeigen Sie, dass folgende Mengen bijektiv zu $\mathbb{N}$ sind:

(*i*) $\mathbb{Z} := \{0\} \cup (\mathbb{N} \times \{+, -\})$, wobei $+$ und $-$ zwei Elemente sind, die mit keiner natürlichen Zahl übereinstimmen.

Beweis. [2 Punkte] Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1 \\ (n/2, +) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ ((n-1)/2, -) & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, gegeben durch $f^{-1}(0) = 1$, sowie für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \{+, -\}$

$$f^{-1}(n, \alpha) = \begin{cases} 2n & \text{falls } (n, \alpha) = (n, +) \\ 2n+1 & \text{falls } (n, \alpha) = (n, -) \end{cases},$$

denn man prüft leicht nach, dass $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$ und $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}}$ gelten (siehe Satz 1.28). $\square$

(*ii*) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Beweis. [1 Punkt] Es gibt verschiedene Möglichkeiten $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzuzählen (d.h. eine Bijektion mit den natürlichen Zahlen aufzustellen). Beispielsweise kann das folgende, nach Cantor benannte, Dreiecksschema benutzt werden, um jeder natürlichen Zahl bijektiv ein Tupel aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zuzuordnen:

$$\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & \to & (1,2) & & (1,3) & \to & (1,4) & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & \cdots & & & \\
\vdots & \nearrow & & & & & &
\end{array}$$

Dabei wird in Richtung der Pfeile gezählt, und man erhält eine eindeutige bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Die ersten Zuordnungen sind

$$f(1) = (1,1)\,,\ f(2) = (1,2)\,,\ f(3) = (2,1)\,,\ f(4) = (3,1)\,,\ f(5) = (2,2)\,,\ \ldots$$

Eine andere Möglichkeit wäre 1 auf $(1,1)$, 2 auf $(1,2)$, 3 auf $(2,1)$, 4 auf $(2,2)$, 5 auf $(2,3)$ abzubilden, usw. □

(*iii*) $X \subset \mathbb{N}$, wobei $|X| = \infty$.

Beweis. [2 Punkte] Für eine Familie $X_1, X_2, X_3, \ldots$ von Teilmengen $X_i \subset \mathbb{N}$ sei m_i für alle $i \in \mathbb{N}$ das nach Aufgabe 2.1 b) existierende kleinste Element von X_i. Nun definieren wir (rekursiv)

$$X_1 := X \ , \quad X_{k+1} := X_k \backslash \{m_k\} \ \text{ wobei } k \in \mathbb{N}\,.$$

Das bedeutet, wir erhalten eine Familie (man schreibt $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$) von Teilmengen $X_i \subset \mathbb{N}$, wobei X_i durch alle Vorgänger $X_1, \ldots, X_{i-1}$ bestimmt wird. Die entsprechenden kleinsten Elemente m_i durchlaufen für $i \in \mathbb{N}$ per Konstruktion die gesamte Menge X, d.h. $X = \cup_{i\in\mathbb{N}} \{m_i\}$. Da außerdem $m_k \neq m_l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ folgt, dass die Abbildung $f : \mathbb{N} \to X, f(n) := m_n$ bijektiv ist. □

Aufgabe 2.3 [Vollständige Induktion; 8 Punkte] *Beweisen Sie:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \ = \ (1 + 2 + \cdots + n)^2$

Beweis. [3 Punkte] In der Vorlesung wurde bereits die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ bewiesen. Wir zeigen also

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\ , \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Für $n = 1$ ist Gleichung (1) offensichtlich wahr. Nehmen wir nun an, dass (1) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1)) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Nach vollständiger Induktion folgt Gleichung (1) für alle $n \in \mathbb{N}$. □

(b) $1 + nh \leqslant (1+h)^n$, für jedes $h \in [-2, \infty)$. Wie heißt diese Ungleichung?

Beweis. [5 Punkte] Die *Bernoulli-Ungleichung* ist für $n = 1$ trivial erfüllt (Gleichheit). Nun gelte die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir behandeln zunächst den Fall $h \in [0, \infty)$:

$$1 + (n{+}1)h \;=\; 1 + nh + h \;\leqslant\; (1{+}h)^n + h \;\leqslant\; (1{+}h)^n + h(1{+}h)^n \;=\; (1{+}h)^{n+1},$$

wobei wir $1 \leqslant (1{+}h)^n$ benutzt haben. Also gilt $1{+}(n{+}1)h \leqslant (1{+}h)^{n+1}$, und die Aussage folgt per vollständiger Induktion.

Sei nun $-2 \leqslant h \leqslant 0$. Dann folgt $-1 \leqslant (1{+}h)^n \leqslant 1$ und damit

$$1 + (n{+}1)h \;\leqslant\; (1{+}h)^n + h \;\leqslant\; (1{+}h)^n + h(1{+}h)^n \;=\; (1{+}h)^{n+1}\,,$$

denn $|h| \geqslant |h|(1{+}h)^n$, also $h \leqslant h(1{+}h)^n$. □

Aufgabe 2.4 [Binomialkoeffizienten, 8 Punkte] Für eine Menge M und eine natürliche Zahl k schreiben wir

$$\binom{M}{k} := \{X \subset M \,|\, |X| = k\}.$$

Für eine natürliche Zahl n seien $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ und

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{[n]}{k}\right|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Beweis. [3 Punkte] Wie im Tipp schreiben wir $\binom{[n+1]}{k+1} = A \cup B$, wobei

$$A = \left\{ X \in \binom{[n+1]}{k+1} \middle| n+1 \in X \right\} \quad , \quad B = \left\{ X \in \binom{[n+1]}{k+1} \middle| n+1 \notin X \right\}.$$

Offenbar gilt $A \cap B = \emptyset$, und somit $\binom{n+1}{k+1} = |A \cup B| = |A| + |B|$.

Außerdem gilt $B = \binom{[n]}{k+1}$, und somit bleibt nur noch $|A| = \binom{n}{k}$ zu zeigen. Aber die beiden Abbildungen

$$A \to \binom{[n]}{k}, \quad X \mapsto X \setminus \{n+1\}$$
$$\binom{[n]}{k} \to A, \quad X \mapsto X \cup \{n+1\}$$

sind invers zu einander, und somit Bijektionen. □

(b) Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $r! = r(r-1)(r-2)\cdots(3)(2)(1)$.

Beweis. [5 Punkte] Wir schreiben

$$f(n,k) := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Sei $P(n)$ die folgende Aussage:

$$P(n): \text{Für alle } 1 \leq k < n \text{ gilt } \binom{n}{k} = f(n,k).$$

Offenbar gilt $P(1)$. Wir wollen zeigen, dass $P(n) \implies P(n+1)$. Wir haben $\binom{n+1}{1} = n+1 = f(n+1,1)$. Die Abbildung $\binom{[n+1]}{1} \to \binom{[n+1]}{n} : X \mapsto [n+1] \setminus X$ ist eine Bijektion, und somit gilt $\binom{n+1}{n} = n+1 = f(n+1,n)$.

Für $1 < k < n$ haben wir

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &\overset{(a)}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&= f(n,k) + f(n,k-1) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n! \times (n+1-k) + n! \times k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= f(n+1,k)\,,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Induktionsannahme benutzt wurde. Der Induktionsschritt ist somit bewiesen, und $P(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □