Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 2
22.10.2013

Übungen zur Analysis 1
für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 2.1 [Mengen; 8 Punkte]

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge. Man schreibt $|M|$ für die *Mächtigkeit* von M, d.h. für die Anzahl an Elementen, die in M enthalten sind. *Zeigen Sie:*

$$|M| = n \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{P}(M)| = 2^n\,.$$

(b) *Zeigen Sie:* $\forall M \subset \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in M \; \forall n \in \mathbb{N} : (n < m \Rightarrow n \notin M))$

[*Tipp zu* (b): Formulieren Sie die Aussage zunächst in Worten und beweisen Sie diese durch Kontraposition mithilfe von vollständiger Induktion.]

Aufgabe 2.2 [Abbildungen; 8 Punkte]

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.25 aus der Vorlesung, d.h. *zeigen Sie:* Ist $f : M \to N$ eine Abbildung, dann gilt für alle $A \subset M$ und $B, C \subset N$

   (*i*) $A \subset f^{-1}(f(A))$

   (*ii*) $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$

(b) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.28 aus der Vorlesung: *Zeigen Sie*, dass es zu jeder bijektiven Abbildung $f : M \to N$ eine eindeutige Abbildung $g : N \to M$ gibt, sodass $f \circ g = id$, d.h. $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$.

(c) Zeigen Sie, dass folgende Mengen bijektiv zu $\mathbb{N}$ sind:

   (*i*) $\mathbb{Z} := \{0\} \cup (\mathbb{N} \times \{+, -\})$, wobei $+$ und $-$ zwei Elemente sind, die mit keiner natürlichen Zahl übereinstimmen.

   (*ii*) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   (*iii*) $X \subset \mathbb{N}$, wobei $|X| = \infty$.

   [*Tipp zu* (*iii*)*:* Benutzen Sie Aufgabe 2.1]

Aufgabe 2.3 [Vollständige Induktion; 8 Punkte] *Beweisen Sie:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \;=\; (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(b) $1 + nh \leqslant (1 + h)^n$, für jedes $h \in [-2, \infty)$. Wie heißt diese Ungleichung?

Aufgabe 2.4 [Binomialkoeffizienten, 8 Punkte] Für eine Menge M und eine natürliche Zahl k schreiben wir

$$\binom{M}{k} := \{X \subset M \| X| = k\}.$$

Für eine natürliche Zahl n seien $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ und

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{[n]}{k}\right|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

(b) Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $r! = r(r-1)(r-2)\cdots(3)(2)(1)$.

[*Tipp zu (a)*: Schreiben Sie $\binom{[n+1]}{k+1} = A \cup B$, wobei $A = \left\{X \in \binom{[n+1]}{k+1} \,|\, n{+}1 \in X\right\}$, und zeigen Sie, dass $|A| = \binom{n}{k}$ und $|B| = \binom{n}{k+1}$.]

Werfen Sie Ihre Lösung bis spätestens **Dienstag, den 29.10.2013, 18:00 Uhr**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Wichtig: Bilden Sie **Zweier- oder Dreiergruppen** und geben Sie nur eine Lösung pro Kleingruppe ab! Sonst kann Ihre Lösung nicht korrigiert werden und Sie erhalten keine Punkte. Alle diejenigen, deren Namen auf der gemeinsamen Lösung zu finden sind (höchstens 3), bekommen dieselbe Anzahl an Punkten. Beachten Sie aber, dass Sie trotzdem anstreben sollten, jede der Aufgaben selbst lösen zu können.

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/