Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Lösung zu Blatt 12

Aufgabe 12.1 [8 Punkte] Für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$, sei

$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

die sogenannte *Indikatorfunktion* der Menge Ω. Falls Ω ein Intervall ist, dann nennt man χ_Ω auch *Rechtecksfunktion*, und im Falle von $[0,\infty)$ *Sprung-* oder *Heaviside-Funktion*. Berechnen Sie für $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ das Oberintegral $J^+(\chi_{[a,c]}, a, b)$, sowie das Unterintegral $J^-(\chi_{[a,c]}, a, b)$. Ist $\chi_{[a,c]}$ integrierbar?

[*Tipp:* Da $\chi_{[a,c]}$ beschränkt ist, dürfen wir Satz 5.6 benutzen. Wählen Sie für jedes n eine Zerlegung

$$Z_n = \left\{ a{=}x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}{=}c{-}\varepsilon_n, c{+}\varepsilon_n{=}y_0^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}{=}b \right\}$$

von $[a,b]$, sodass $x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{c-a-\varepsilon_n}{n}$, sowie $y_k^{(n)} - y_{k-1}^{(n)} = \frac{b-c-\varepsilon_n}{n}$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, wobei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, mit $0 < \varepsilon_n < \min\{c-a, b-c\}$. Was ist $\lim_n |Z_n|$? Berechnen Sie die Ober- und Untersummen $S^\pm(\chi_{[a,c]}, Z_n)$ und ihre Grenzwerte für $n \to \infty$.]

Lösung. Ein Hinweis vorab: Aufgaben dieser Art werden sehr viel zugänglicher, wenn Sie sich ein Bild dazu zeichnen. Die obige Zerlegung wurde so gewählt, dass die Unter- und Obersummen eine möglichst einfache Form annehmen. Insbesondere ist die Wahl einer Nullfolge $(\varepsilon_n)_n$ (um die Stelle c zu separieren) keinesfalls notwendig, erleichtert aber die Rechnung. Für die n-te Obersumme erhalten wir

$$\begin{aligned} S^+(\chi_{[a,c]}, Z_n) &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})}_{=\frac{c-a-\varepsilon_n}{n}} \underbrace{\sup_{[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]} \chi_{[a,c]}}_{=1, \text{ da } a \leqslant x_j^{(n)} < c} + \underbrace{(y_0^{(n)} - x_n^{(n)})}_{=2\varepsilon_n} \underbrace{\sup_{[x_n^{(n)}, y_0^{(n)}]} \chi_{[a,c]}}_{=1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \underbrace{(y_k^{(n)} - y_{k-1}^{(n)})}_{=\frac{b-c-\varepsilon_n}{n}} \underbrace{\sup_{[y_{k-1}^{(n)}, y_k^{(n)}]} \chi_{[a,c]}}_{=0, \text{ da } c < y_j^{(n)} \leqslant b} \\ &= \frac{c-a-\varepsilon_n}{n} \sum_{k=1}^n 1 \;+\; 2\varepsilon_n \;+\; \frac{b-c-\varepsilon_n}{n} \sum_{k=1}^n 0 \;=\; c - a + \varepsilon_n \end{aligned}$$

und analog für die Untersummen

$$S^-(\chi_{[a,c]}, Z_n) \;=\; \frac{c-a-\varepsilon_n}{n} \sum_{k=1}^n 1 \;+\; 2\varepsilon_n \cdot 0 \;+\; \frac{b-c-\varepsilon_n}{n} \sum_{k=1}^n 0 \;=\; c - a - \varepsilon_n,$$

wobei in der obigen Rechnung das Supremum durch das Infimum ersetzt werden muss. So ist das Infimimum von $\chi_{[a,c]}$ im Intervall $[x_n^{(n)}, y_0^{(n)}]$ gleich 0 [4 Punkte].

Für die Feinheit $|Z_n|$ der Zerlegung Z_n gilt

$$|Z_n| = \max\left\{\frac{c-a-\varepsilon_n}{n}, \frac{b-c-\varepsilon_n}{n}, 2\varepsilon_n\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Da außerdem $|\chi_{[a,c]}(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dürfen wir Satz 5.6 anwenden, d.h. das Unter- bzw. Oberintegral ist der Grenzwert der Unter- bzw. Obersummen für $n \to \infty$. Es gilt somit

$$J^+(\chi_{[a,c]}, a, b) = \lim_{n\to\infty} (c-a+\varepsilon_n) = c - a \qquad \text{(1 Punkt)}$$

sowie

$$J^-(\chi_{[a,c]}, a, b) = \lim_{n\to\infty} (c-a-\varepsilon_n) = c - a \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Insbesondere stimmen also Ober- und Unterintegral von $\chi_{[a,c]}$ überein, weshalb $\chi_{[a,c]}$ über $[a, b]$ integrierbar ist(mit Integral $\int_a^b \chi_{[a,c]}(x)\,dx = c - a$) [1 Punkt]. □

Aufgabe 12.2 [8 Punkte] Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und χ_Ω wie oben.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-1}^{1} \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

falls $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$. [2 Punkte; *Tipp:* Gebietsadditivität, d.h. für eine auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktion g gilt $\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx$, falls $a \leqslant c \leqslant b$ (Satz 5.15).]

Beweis. Da f stetig ist, und χ_Ω nach Aufgabe 12.2 Riemann-integrierbar ist, gilt nach Satz 5.15

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx &= \int_{-1}^{a} \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx + \int_a^b \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx + \int_b^1 \chi_{[a,b]}(x) f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{a} 0\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^1 0\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx$, wenn $g(x) = h(x)\ \forall x \in (a, b)$, d.h. die Randpunkte sind nicht relevant für den Wert des Integrals. Dies ist äquivalent zu $\int_a^b u(x)\,dx = 0$ falls $u(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es folgt einerseits direkt aus der Konstruktion des Riemann-Integrals, dass *Funktionswerte auf Punktmengen keinen Einfluss auf den Wert des Integrals haben*, andererseits sieht man dies z.B. mithilfe des Mittelwertsatzes (ein Beweis dieser Aussage war hier allerdings nicht verlangt): Sei u eine auf $[a, b]$ integrierbare Funktion. Für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < b-a$ gibt es ein $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (zwischen $\inf_{[a,a+\varepsilon]} u$ und $\sup_{[a,a+\varepsilon]} u$), sodass

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} u(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^b u(x)\,dx = \eta_\varepsilon\,\varepsilon + \int_{a+\varepsilon}^b u(x)\,dx$$

Da u beschränkt ist, ist insbesondere $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$ beschränkt. Durch die Wahl von $\varepsilon > 0$ kann $\eta_\varepsilon\,\varepsilon$ somit beliebig klein gemacht werden. Dies zeigt, dass das Integral auf der linken Seite nicht von $u(a)$, sondern nur von $u(x)$ für $x > a$ abhängt. Analoges gilt an der Stelle b (bzw. in jedem separierten Punkt). □

(*b*) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$, sei $g_n(x) := \frac{n}{2}\ \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g_n(x)f(x)\,dx = f(0)\,.$$

[6 Punkte; *Tipp:* Mittelwertsatz der Integralrechnung]

Beweis. Zunächst gilt nach Aufgabenteil (*a*) [1 Punkt]

$$\int_{-1}^{1} g_n(x)f(x)\,dx \;=\; \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in [-1/n, 1/n]$, sodass $\int_{-1/n}^{1/n} f(x)\,dx \;=\; f(\xi_n)\frac{2}{n}$ [3 Punkte], d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} g_n(x)f(x)\,dx = f(\xi_n)\,.$$

Die Behauptung folgt nun wegen $\lim_n \xi_n = 0$ [1 Punkt] und der (Folgen-)Stetigkeit von f [1 Punkt]. □

Aufgabe 12.3 [8 Punkte] Ziel dieser Aufgabe ist es, $\int_0^x t^2\,dt$ für $x > 0$ auf zwei verschiedene Arten zu berechnen.

(*a*) Berechnen Sie $\int_0^x t^2\,dt$ mithilfe von Riemann-Summen.

[7 Punkte; *Tipp:* Orientieren Sie sich an Beispiel 5.19: Angenommen $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ist eine Zerlegung von $[0, x]$, dann gibt es $\alpha > 0$, sodass es für jedes $j = 1, \ldots, n$ ein $\xi_j(\alpha)$ zwischen x_{j-1} und x_j gibt, mit $\xi_j^2(\alpha)(x_j - x_{j-1}) = \alpha(x_j^3 - x_{j-1}^3)$. Finden Sie α. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass $(1-t^3)/(1-t) = 1+t+t^2$ für $t \neq 1$.

Beweis. Wir orientieren uns an Beispielaufgabe 5.19. Zunächst etablieren wir ein

Lemma. Sei $0 \le a < b$. Dann existiert $\xi(a, b) \in \,]a, b[$ mit $3\xi(a, b)^2(b - a) = b^3 - a^3$. Aus der Formel für die Geometrische Reihe, oder direktes Nachrechnen, folgt dass $(b - a)(b^2 + ab + a^2) = b^3 - a^3$. Da $a < b$ und $a^2 < ab < b^2$ sehen wir, dass

$$3a^2 < b^2 + ab + a^2 = \frac{b^3 - a^3}{b - a} < 3b^2.$$

Wir setzen $\xi(a, b) = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}} = \sqrt{\frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)}$ und schlussfolgern $a^2 < \xi^2 < b^2$. Da $x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend ist für $x \ge 0$ folgt $\xi \in \,]a, b[\,$. Das schließt den Beweis des Lemmas ab.

Da $f(t) = t^2$ stetig ist, können wir $\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ mit Hilfe von Riemann-Summen berechnen. Sei also $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[0, x]$. Wir wählen $\xi_n = \xi(x_{n-1}, x_n)$ (Notation aus dem Lemma) und erhalten als Riemann-Summe für diese Zerlegung (und Wahl der Stützpunkte)

$$\sum_{k=1}^{n}(x_n - x_{n-1})f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{n}(x_n - x_{n-1})\xi(x_{n-1}, x_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}(x_n^3 - x_{n-1}^3)$$

Hierbei handelt es sich um eine Teleskope Summe mit Wert $\frac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) = \frac{1}{3}(x^3 - 0^3)$. Für diese Wahl der Stützpunkte ist die Riemann-Summe also *unabhängig* von der Zerlegung und somit *gleich* dem Riemann-Integral: $\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$. □

(*b*) Validieren Sie Ihr Ergebnis aus (*a*) mithilfe von Satz 5.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). [1 Punkt]

Beweis. Sei $F(t) = \frac{t^3}{3}$. Da $F' = f$ und f stetig ist, folgt

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = \frac{x^3}{3}.$$

aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Aufgabe 12.4 [8+4 Punkte] In dieser Aufgabe zeigen wir, dass

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{$*$}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e = \exp(1)$ die Eulersche Zahl bezeichnet.

Bemerkung: Abschätzungen dieser Art sind als Stirling-Formeln bekannt. Mit mehr Aufwand kann man zeigen, dass $\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ eine bessere Näherung für $n!$ ist.

Zeigen Sie, dass

(*i*) $\log n! = \sum_{k=2}^n \log k$, [1 Punkt]

Beweis. Wie in der Vorlesung gezeigt folgt aus dem Additionstheorem 2.61 ($\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$) die Version $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Einfache Induktion zeigt, dass $\log(x_1x_2\ldots x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Da $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$ ergibt sich

$$\log n! = \sum_{k=1}^n \log k.$$

Das gewünschte Ergebnis folgt aus der beobachtung $\exp(0) = 1$, also $\log 1 = 0$. □

(*ii*) $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t = n\log n - n + 1$. [2 Punkte]

Beweis. $F(x) = x\log x - x$ ist eine Stammfunktion von $\log x$. Das folgt durch einfaches Nachrechnen aus der Produktregel und $(\log x)' = \frac{1}{x}$. Da $\log x$ auf $[1, n]$ stetig ist folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (und $\log 1 = 0$), dass

$$\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t = F(n) - F(1) = n\log n - n + 1.$$

□

(*iii*) $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t \le \log n! \le \int_1^n \log t\,\mathrm{d}t + \log n$ [4 Punkte; *Tipp:* Schreiben Sie $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log t\,\mathrm{d}t$ und benutzen/beweisen Sie, dass für eine monoton wachsende Funktion f, $f(a)(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le f(b)(b-a)$.]

Beweis. Wir Beweisen zunächst die Hilfsaussage: sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (und somit integrierbar). Dann gilt $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(b)(b-a)$. Wir zeigen die erste Ungleichug, die zweite ist analog. Sei $g(t) = f(a)$. Dann gilt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a, b]$ und somit, dass $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Aber $g(t)$ ist eine konstante Funktion, und somit hat das Integral den Wert $f(a)(b-a)$ (z. B. da $f(a)t$ eine Stammfunktion zu g ist).

Wir zeigen nun $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t \leq \log n!$. Durch Gebietsadditivität können wir $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log t\,\mathrm{d}t$ schreiben. Aus der oben bewiesenen Hilfsaussage folgt, dass $\int_{k-1}^k \log t\,\mathrm{d}t \leq (k-(k-1))\log k = \log k$ (da log monoton wachsend ist, vgl Satz 3.19(a)). Die gewünschte Ungleichung folgt durch Aufsummieren (und Teilaufgabe (i)).

Schließlich zeigen wir $\log n! \leq \int_1^n \log t\,\mathrm{d}t + \log n$. Aus der Hilfsaussage folgt, dass $\int_{k-1}^k \log t\,\mathrm{d}t \geq \log(k-1)$. Durch Aufsummieren folgt $\int_1^n \log t\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n-1} \log k$. Die gewünschte Ungleichung folgt durch Addition von $\log n$ auf beiden Seiten (und Teilaufgabe (i)). □

Schließen Sie den Beweis von $(*)$ ab. [1 Punkt]

Beweis. Die Kombination von *(ii)* und *(iii)* liefert

$$n \log n - n + 1 \leq \log n! \leq n \log n - n + 1 + \log n.$$

Da die Exponentialfunktion exp monoton wachsend ist, erhält sie Ungleichungen, und es folgt dass

$$\exp(n \log n - n + 1) \leq \exp(\log n!) \leq \exp(n \log n - n + 1 + \log n).$$

Die Ungleichung $(*)$ folgt durch Benutzung des Additionstheorems 2.61. □

Zusatzaufgabe [4 Bonuspunkte; mit Computer/Taschenrechner]: Zeigen Sie, dass

$$n! \leq n\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \geq 7.$$

Beweis. Da log monoton wachsend ist, ist es hinreichend (und notwendig) zu zeigen, dass

$$\log n! \leq n \log n - n + \log n.$$

Sei $d_n = n \log n - n + \log n - \log n!$. $(d_n)_n$ ist eine monoton wachsende Folge. Das folgt aus unserer Konstruktion der ursprünglichen Abschätzung: Wir haben $n \log n - n = \int_1^n \log t\,\mathrm{d}t - 1$, vgl. Teilaufgabe (ii). Es gilt weiterhin $\log k = \int_k^{k+1} \log\lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ und somit $\int_1^n \log\lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \log{(n-1)!}$. Die Kombination dieser Aussagen liefert

$$\begin{aligned} d_n &= n \log n - n + \log n - \log n! \\ &= n \log n - n - \log{(n-1)!} \\ &= \int_1^n \log t\,\mathrm{d}t - 1 - \int_1^n \log\lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^n (\log t - \log\lfloor t \rfloor)\,\mathrm{d}t - 1 \end{aligned}$$

Da log monoton wachsend ist gilt $\log t - \log\lfloor t\rfloor \geq 0$ und somit $d_{n+1} - d_n = \int_n^{n+1}(\log t - \log\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Das beweist die Behauptung, dass d_n monoton wächst.

Wir sollen zeigen, dass $d_n \geq 0$ für $n \geq 7$. Da d_n monoton wächst ist es hinreichend zu zeigen, dass $d_7 \geq 0$. Taschenrechner oder Computer berechnen leicht, dass

$$d_7 = 0.0421\cdots > 0.$$

$\square$

Bemerkung: Sei $x = n + \epsilon$, $\epsilon \in [0, 1[$. Dann gilt $\log x - \log\lfloor x\rfloor = \log\left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \sim \frac{\epsilon}{n}$. Folglich gilt $\int_{k-1}^{k}(\log t - \log\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t \sim \int_0^1 \frac{\epsilon}{k-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{k-1}$ und daher $d_n \sim -1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{2}\int_1^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \sim \frac{1}{2}\log n$. Da d_n misst, "wie viel zu groß" unsere Abschätzung ist, erhalten wir $\log n! = n\log n - n + \log n - d_n \sim n\log n - n + \frac{1}{2}\log n$ (vgl. die "bessere Näherung" in der ersten Bemerkung). In dieser "Analyse" haben wir Terme unabhängig von n vernachlässigt, weswegen wir den $\log\sqrt{2\pi}$ Term auf diese Weise nicht erhalten können.