Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 12
21.01.2014

Übungen zur Analysis 1
für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 12.1 [8 Punkte] Für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$, sei

$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

die sogenannte *Indikatorfunktion* der Menge Ω. Falls Ω ein Intervall ist, dann nennt man χ_Ω auch *Rechtecksfunktion*, und im Falle von $[0,\infty)$ *Sprung-* oder *Heaviside-Funktion.* Berechnen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ das Oberintegral $J^+(\chi_{[a,c]}, a, b)$, sowie das Unterintegral $J^-(\chi_{[a,c]}, a, b)$. Ist $\chi_{[a,c]}$ integrierbar?

[*Tipp:* Da $\chi_{[a,c]}$ beschränkt ist, dürfen wir Satz 5.6 benutzen. Wählen Sie für jedes n eine Zerlegung

$$Z_n = \left\{a{=}x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}{=}c{-}\varepsilon_n, c{+}\varepsilon_n{=}y_0^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}{=}b\right\}$$

von $[a, b]$, sodass $x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{c-a-\varepsilon_n}{n}$, sowie $y_k^{(n)} - y_{k-1}^{(n)} = \frac{b-c-\varepsilon_n}{n}$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, wobei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, mit $0 < \varepsilon_n < \min\{c-a, b-c\}$. Was ist $\lim_n |Z_n|$? Berechnen Sie die Ober- und Untersummen $S^\pm(\chi_{[a,c]}, Z_n)$ und ihre Grenzwerte für $n \to \infty$.]

Aufgabe 12.2 [8 Punkte] Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und χ_Ω wie oben.

(*a*) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-1}^{1} \chi_{[a,b]}(x) f(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

falls $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$. [2 Punkte; *Tipp:* Gebietsadditivität, d.h. für eine auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktion g gilt $\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx$, falls $a \leqslant c \leqslant b$ (Satz 5.15).]

(*b*) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$, sei $g_n(x) := \frac{n}{2}\, \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g_n(x) f(x)\, dx = f(0)\,.$$

[6 Punkte; *Tipp:* Mittelwertsatz der Integralrechnung]

Aufgabe 12.3 [8 Punkte] Ziel dieser Aufgabe ist es, $\int_0^x t^2\, dt$ für $x > 0$ auf zwei verschiedene Arten zu berechnen.

(*a*) Berechnen Sie $\int_0^x t^2\, dt$ mithilfe von Riemann-Summen.

[7 Punkte; *Tipp:* Orientieren Sie sich an Beispiel 5.19: Angenommen $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ist eine Zerlegung von $[0, x]$, dann gibt es $\alpha > 0$, sodass es für jedes $j = 1, \ldots, n$ ein $\xi_j(\alpha)$ zwischen x_{j-1} und x_j gibt, mit $\xi_j^2(\alpha)(x_j - x_{j-1}) = \alpha(x_j^3 - x_{j-1}^3)$. Finden Sie α. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass $(1-t^3)/(1-t) = 1+t+t^2$ für $t \neq 1$.

(*b*) Validieren Sie Ihr Ergebnis aus (*a*) mithilfe von Satz 5.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). [1 Punkt]

Aufgabe 12.4 [8+4 Punkte] In dieser Aufgabe zeigen wir, dass

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad (*)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $e = \exp(1)$ die Eulersche Zahl bezeichnet.

Bemerkung: Abschätzungen dieser Art sind als Stirling-Formeln bekannt. Mit mehr Aufwand kann man zeigen, dass $\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ eine bessere Näherung für $n!$ ist.

Zeigen Sie, dass

(*i*) $\log n! = \sum_{k=2}^n \log k$, [1 Punkt]

(*ii*) $\int_1^n \log t \,\mathrm{d}t = n \log n - n + 1$. [2 Punkte]

(*iii*) $\int_1^n \log t \,\mathrm{d}t \leq \log n! \leq \int_1^n \log t \,\mathrm{d}t + \log n$ [4 Punkte; *Tipp:* Schreiben Sie $\int_1^n \log t \,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log t \,\mathrm{d}t$ und benutzen/beweisen Sie, dass für eine monoton wachsende Funktion f, $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(b)(b-a)$.]

Schließen Sie den Beweis von $(*)$ ab. [1 Punkt]

Zusatzaufgabe [4 Bonuspunkte; mit Computer/Taschenrechner]: Zeigen Sie, dass

$$n! \leq n\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \geq 7.$$

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 28.01.2014**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/