Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 10
07.01.2014

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 10.1 (!) [Mittelwertsatz, 8 Punkte]

(*a*) Sei $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F(0) = 0$, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $F'(x) \geqslant 0$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie, dass $F(x) \geqslant 0$ für alle $x \geqslant 0$. [2 Punkte]

(*b*) Sind $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) = g(0)$, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar sind, sodass $f'(x) \leqslant g'(x)$ für alle $x > 0$. Folgern Sie, dass $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \geqslant 0$. [2 Punkte]

(*c*) Zeigen Sie: Für alle $x, c \geqslant 0$ gilt $\sqrt{x^2 + c^2} - c \leqslant x$. [4 Punkte]

Aufgabe 10.2 (!) [Betragsfunktion, 8 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

(*a*) Zeigen Sie, dass $g := f\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung g'. [2 Punkte]

(*b*) Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. [1 Punkt; *Tipp:* Finden Sie eine Nullfolge $(x_n)_n$ mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\frac{|x_n|}{x_n}$ für $n \to \infty$ nicht konvergiert.]

(*c*) Wir definieren für jedes $\varepsilon \geqslant 0$ eine Funktion $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_\varepsilon(x) := \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$. Zeigen Sie:

(*i*) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist f_ε differenzierbar. [1 Punkt]

(*ii*) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\varepsilon \mapsto f_\varepsilon(x)$ in $\varepsilon = 0$ Lipschitz-stetig. [2 Punkte; *Tipp:* Aufgabe 10.1]

(*iii*) f_ε approximiert f *gleichmäßig*, d.h. es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \big| f_\varepsilon(x) - f(x) \big| = 0$$

Man nennt f_ε in diesem Zusammenhang eine *Regularisierung* von f. [2 Punkte]

Aufgabe 10.3 (!) [Kettenregel, 8 Punkte]

(*a*) Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x^a := e^{a \log x}.$$

Bestimmen Sie die Ableitungen von $f(x) = x^a$, $g(x) = a^x$ und $h(x) = x^x$. [4 Punkte]

(*b*) Berechnen Sie die Ableitungen von $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ (vgl. Satz 3.19(b)).
[4 Punkte; *Tipp:* Die Gleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ könnte hilfreich sein.]

Aufgabe 10.4 (!) [Extrema, 8 Punkte] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x + 1.$$

Aus ihrer Skizze sollten insbesondere Anzahl und ungefähre Lage der Nullstellen, sowie Anzahl, ungefähre Lage und Art der Extrema hervorgehen. Begründen Sie diese Eigenschaften ihrer Skizze. Verwendung technischer Hilfsmittel ist weder vorgesehen noch notwendig für diese Aufgabe.
[*Tipps/Anleitung:* Nutzen Sie, dass kritische Punkte von f zu Nullstellen von f' korrespondieren, und dass f zwischen den kritischen Punkten monoton ist (Mittelwertsatz). Darüber hinaus wissen Sie z. B., dass $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass $f'(x)$ genau drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat, mit $-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1 < x_3 < 2$. Zeigen Sie, dass f bei x_1 ein Minimum, bei x_2 ein Maximum und bei x_3 ein Minimum hat, mit $f(x_1) < 0$. Zeigen Sie, dass f' auf $[1, 2]$ monoton wachsend ist, berechnen Sie $f(1)$ und $f'(1)$, und Schlussfolgern Sie mittels 10.1(b) dass $f(x_3) > 0$. Nun Skizzieren Sie den Graphen.]

(!) *Aufgaben, die mit einem Ausrufezeichen versehen wurden, beinhalten ein sehr wichtiges Konzept, welches unbedingt verstanden werden sollte.*

Unmarkierte Aufgaben sind nicht weniger wichtig, sondern beruhen meist auf direkteren Methoden, die nicht typisch für die jeweilige Aufgabe sind, sondern häufiger auftreten.

***** *Aufgaben, die mit einem Stern versehen wurden, sollten erst bearbeitet werden, wenn der Rest des Blattes gelöst wurde.*

Werfen Sie Ihre (in Zweier- oder Dreiergruppen erstellte) Lösung bis spätestens **18 Uhr am Dienstag, den 14.01.2014**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*

Weitere Informationen finden Sie unter http://www.math.lmu.de/~gottwald/13ana1IS/