Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
Übungsblatt 1
15.10.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 1.1 [8 Punkte] Seien A, B und C Aussagen.

(a) Negieren Sie:

(i) $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$

(ii) Wenn Pils besser schmeckt als Weißbier, dann müssen Weißwürste nach 12 Uhr gegessen werden.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

(i) $\neg(A \wedge \neg A)$

(ii) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

(iii) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg C)$

(iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(v) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(vi) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge (C \Leftrightarrow A))$

Aufgabe 1.2 [8 Punkte]

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung behaupteten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, sowie die zweite de Morgan'sche Regel für die Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ mithilfe von Wahrheitstafeln.

(b) Seien A, B und C Aussagen. Benutzen Sie Wahrheitstafeln, um zu entscheiden ob folgende Aussagen Tautologien sind:

(i) $(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A$

(ii) $(A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

(iii) $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Aufgabe 1.3 [8 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass es nur *eine* leere Menge gibt.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\{1\} \subset \{\{1\}, \{1,2\}\}$

(ii) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

(iii) $0 \in \{\emptyset\}$

(iv) $\{\{1\}\} \cup \{\{2\}\} = \{1,2\}$

(c) Sei G eine Datenbank der Länge N über potentielle Opfer eines Hackerangriffs und seien s_j die (Namen der) potentiellen Opfer, wobei $j \in \{1, \ldots, N\} =: \mathcal{J}$. Wir identifizieren G mit der Gesamtheit der potentiellen Opfer, also $G = \{s_j \mid j \in \mathcal{J}\}$. Sei $A(\cdot)$ die Aussageform mit Grundbereich G, definiert durch

$$A(s) := s \text{ hat eine Firewall.}$$

(i) Formulieren Sie folgende Aussage in Worten und mithilfe des Allquantors:

$$A(s_1) \wedge A(s_2) \wedge \cdots \wedge A(s_{N-1}) \wedge A(s_N)\,.$$

(ii) Formulieren Sie folgende Aussage auschließlich mithilfe der Aussagen $A(s_k)$, wobei $k \in \mathcal{J}$, und der Verknüpfung $\vee$:

$$\big\{s \in G \mid \exists j \in \mathcal{J} : (s = s_j) \wedge (A(s_j) \vee A(s_{j+1}))\big\} \neq \emptyset\,.$$

Tipp: Formulieren Sie die Aussage zunächst in Worten.

Aufgabe 1.4 [8 Punkte]

(a) Sei m eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Wenn m^2 durch 3 teilbar ist, dann ist auch m durch 3 teilbar.

Tipp: Schreiben Sie $R_3(m)$ für den Rest bei Division einer natürlichen Zahl m durch 3, also $0 \leqslant R_3(m) \leqslant 2$, und zeigen Sie zunächst $(R_3(m) = 1) \Rightarrow (R_3(m^2) = 1)$, sowie $(R_3(m) = 2) \Rightarrow (R_3(m^2) = 1)$.

(b) Zeigen Sie: Sind m, n natürliche Zahlen, so gilt $\frac{m^2}{n^2} \neq 3$. Was könnte das *...etc.* aus der Vorlesung bedeuten?

Wichtig: Bilden Sie **Zweier- oder Dreiergruppen** und geben Sie nur **eine Lösung pro Kleingruppe** ab! Sonst kann Ihre Lösung nicht korrigiert werden und Sie erhalten keine Punkte. Alle diejenigen, deren Namen auf der gemeinsamen Lösung zu finden sind (höchstens 3), bekommen dieselbe Anzahl an Punkten. Beachten Sie aber, dass Sie trotzdem anstreben sollten, jede der Aufgaben selbst lösen zu können.

Werfen Sie Ihre Lösung bis spätestens **Dienstag, den 22.10.2013, 18:00 Uhr**, *in den gekennzeichneten Übungskasten im ersten Stock nahe der Bibliothek.*