H24 T1 A2

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2024.
(Es ist $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$)

(a) Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler H mit $|H| = 23$ besitzt.

Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Dritter Sylowsatz
$\Rightarrow \nu_{23} \mid 2^3 \cdot 11 \Rightarrow \nu_{23} \in \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88\}$, außerdem $\nu_{23} \equiv 1 \mod 23$

$2, 4, 8, 11, 22 \not\equiv 1 \bmod 23$, $44 \equiv -2 \not\equiv 1$
$\bmod 23$, $88 = 2 \cdot 44 \equiv 2(-2) = -4 \not\equiv 1 \bmod 23$
$\Rightarrow \nu_{23} = 1$ Sei H die einzige 23-Sylowgr.
$\nu_{23} = 1 \Rightarrow H \trianglelefteq G$ Wegen $|G| = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$
ist $|H| = 23^1 = 23$.

(b) Sei $\mathcal{U}_{11}$ die Menge der 11-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie, dass H transitiv auf $\mathcal{U}_{11}$ operiert.

Laut Zweitem Sylowsatz operiert G transitiv auf $\mathcal{U}_{11}$ (je zwei 11-Sylowgr. sind konjugiert).

au
2
92
H(
H(
2. Fal
[Erinn
Menge
Dies k

Durch Einschränkung dieser Operation erhält man eine Op $\bullet$ von H auf $\mathcal{U}_{11}$ geg. durch $h \bullet U = hUh^{-1}$ $\forall h \in H, U \in \mathcal{U}_{11}$. Sei $U \in \mathcal{U}_{11}$. Zu zeigen ist dann $H(U) = \mathcal{U}_{11}$.

Laut Vl. ist die Bahnlänge stets ein Teiler der Gruppenordnung. hier: $|H| = 23 \Rightarrow |H(U)|$ teilt $23 \overset{23 \text{ prim}}{\Longrightarrow} |H(U)| \in \{1, 23\}$.

1. Fall: $|H(U)| = 23$

Es gilt $r_{11} = |\mathcal{U}_{11}|$. 3. Sylowsatz $\Rightarrow r_{11} \mid 2^3 \cdot 23$

23

von

$\mathcal{U}_{11}$

ransitiv

jugiert).

$\Rightarrow r_{11} \in \{1, 2, 4, 8, 23, 46, 92, 184\}$

außerdem $r_{11} \equiv 1 \mod 11$, $1, 2, 4, 8 \not\equiv 1 \mod 11$,

$23 \equiv 1 \mod 11$, $46 = 2 \cdot 23 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 11$,

$92 \equiv 4 \not\equiv 1 \mod 11$, $184 \equiv 8 \not\equiv 1 \mod 11 \Rightarrow r_{11} \in \{1, 23\}$

$H(U) \leq \mathcal{U}_{11}$, $|H(U)| = 23$, $|\mathcal{U}_{11}| \leq 23 \Rightarrow$

$H(U) \leq \mathcal{U}_{11}$, $|H(U)| = |\mathcal{U}_{11}| \Rightarrow H(U) = \mathcal{U}_{11}$

2. Fall: $|H(U)| = 1$

[Erinnerung: Operiert eine endliche Gruppe G auf einer Menge X, dann gilt $|G(x)| = (G : G_x)$ $\forall x \in X$.

Dies kann angewendet werden auf den Fall, dass

X die Menge der p-Sylowgr. von G ist,
für eine Primzahl p. In diesem Fall
ist $G_P = N_G(P)$ $\forall P \in X$, und
$\nu_p = |G(P)| = (G : N_G(P))$]

Laut Vorlesung gilt $\nu_{11} = (G : N_G(U))$

Aus $|H(U)| = 1$ folgt $H(U) = \{U\}$
und somit $hUh^{-1} = h \cdot U = U$
$\forall h \in H$. Es gilt also $H \leq N_G(U)$
Langrange $\Rightarrow 23 \mid |N_G(U)|$
außerdem: $U \leq N_G(U) \overset{|U|=11}{\Rightarrow}$

d
b
π
(G
Die
wege
Unter

$\neq id_N$ für mindestens ein $u \in U$, dann

$11 \mid N_G(U)$ Insgesamt ist also

$\mathrm{kgV}(11, 23) = 253$ ein Teiler von $|N_G(U)|$.

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}$ mit $|N_G(U)| = 253 \cdot d$

$\Rightarrow \nu_{11} = (G : N_G(U)) = \dfrac{|G|}{|N_G(U)|} =$

$\dfrac{2024}{253 \cdot d} = \dfrac{8}{d} \Rightarrow \nu_{11} \mid 8 \Rightarrow \nu_{11} \in \{1, 2, 4, 8\}$

Mit $\nu_{11} \equiv 1 \bmod 11$ folgt $\nu_{11} = 1$. $\Rightarrow$

$H(U) = \{U\} = \mathcal{U}_{11}$

(c) Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler N der Ordnung 253 besitzt.

Gesucht ist ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit

$(G : N) = \dfrac{|G|}{|N|} = \dfrac{2024}{253} = 8$

gen

Sei

$\nu_{11} \mid 8$

$\nu_{11} \equiv$

Die ein

dem 2.

(d) Zei

Teil (c)

Laut Vor

von G a

Gruppen

$|G/N| =$

Da nach Teil (a) $H \trianglelefteq G$ ist, kann die Faktorgruppe $\bar{G} = G/H$ gebildet werden. Es reicht zu zeigen, dass ein $\bar{N} \trianglelefteq \bar{G}$ mit $(\bar{G} : \bar{N}) = 8$ existiert, denn auf Grund des Korrespondenzsatzes ist dann $N = \pi_H^{-1}(\bar{N})$, das Urbild von $\bar{N}$ unter dem kan. Epimorphismus $\pi_H : G \to \bar{G}$, ein Normalteiler von G mit $(G : N) = 8$.

Die Untergruppen von $\bar{G}$ vom Index 8 sind wegen $|\bar{G}| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{2024}{23} = 88$ genau die Untergruppen der Ordnung $\frac{88}{8} = 11$, also genau die 11-Sylowgruppen von $\bar{G}$.

Sei $\bar{\nu}_{11}$ deren Anzahl. 3. Sylowsatz $\Rightarrow$
$\bar{\nu}_{11} \mid 8 \Rightarrow \bar{\nu}_{11} \in \{1, 2, 4, 8\}$, außerdem
$\nu_{11} \equiv 1 \mod 11$, $2, 4, 8 \not\equiv 1 \mod 11 \Rightarrow \bar{\nu}_{11} = 1$

Die einzige 11-Sylowgruppe $\bar{N}$ von $\bar{G}$ ist nach dem 2. Sylowsatz ein Normalteiler von $\bar{G}$.

(d) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Teil (c) $\Rightarrow \exists N \trianglelefteq G$ mit $|N| = 253$

Laut Vorlesung folgt die Auflösbarkeit von G aus der Auflösbarkeit der beiden Gruppen N und G/N. Es gilt

$$|G/N| = (G : N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{2024}{253} = 8.$$

...ie

...t(N)

$N \rtimes_\phi U$

...ipfung

...$_2), u_1 u_2)$

... ein nicht-

...n gilt $\phi(u)$

...$\in U$, dann

...lsche Gruppe.

Als Gruppe der Primzahlpotenzordnung 2^3 ist G/N auflösbar.

zur Auflösbarkeit von N: Sei H' eine 23-Sylowgruppe von N. $|N| = 11 \cdot 23 \Rightarrow$

$$|H'| = 23 \xRightarrow[v_{23}=1]{\text{Teil (a)}} H' = H \quad \text{Teil (a)}$$

$$\Rightarrow H \trianglelefteq G \Rightarrow H \trianglelefteq N$$

$$G \supseteq N \supseteq H$$

$|H| = 23$ Primzahl $\Rightarrow H$ ist zykl $\Rightarrow H$ aufl.

$$|N/H| = \frac{|N|}{|H|} = \frac{253}{23} = 11 \text{ prim} \Rightarrow$$

N/H ist zyklisch und aufl.

$H, N/H$ auflösbar $\Rightarrow N$ ist aufl. $\square$

Semidirekte Produkte

Def.: geg.: Gruppen U, N sowie ein Homomorphismus $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$

(äußeres) semidirektes Produkt $N \rtimes_\phi U$

= Menge $N \times U$ mit der Verknüpfung

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

wichtige Eigenschaft: Ist ϕ ein <u>nicht</u>-<u>trivialer</u> Homomorphismus, d.h. gilt $\phi(u) \neq id_N$ für mindestens ein $u \in U$, dann ist $N \rtimes_\phi U$ eine <u>nicht-abelsche</u> Gruppe.

Ist ϕ trivial, dann gilt jeweils $(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2) = (n_1 \mathrm{id}_N(n_2), u_1 u_2) = (n_1 n_2, u_1 u_2)$, d.h. es ist $N \rtimes_\phi U = N \times U$ (als Gruppen).

<u>Erinnerung</u>: Ist N eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, dann existiert ein Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Aut}(N)$. Sei $g \in N$ ein Element mit $N = \langle g \rangle$. Dann erhält man den Isomorphismus folgendermaßen: Jedes $a + n\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (mit $a \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$) wird jeweils auf $\tau_a \in \mathrm{Aut}(N)$ abgebildet, wobei τ_a geg. durch $\tau_a(g) = g^a$.

Außerdem gilt: (i) $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$

(ii) $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/p^{e-1}(p-1)\mathbb{Z}$ falls $p > 2$ prim, $e \in \mathbb{N}$

(iii) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}\}$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und

$$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \quad \forall r \in \mathbb{N} \text{ mit } r \geq 3$$

F20T1A3 (V) Geben Sie drei paarweise nicht isomorphe, nicht abelsche Gruppen der Ordnung 2002 an. (Es ist $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$)

Sei $U = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

(Dann ist $|M| = 2$, $|N| = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.)

Um nicht-abelsche semidirekte Produkte zu konstruieren, benötigen wir nichttriviale Homomorphismen $\phi: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$.

Ist $\iota \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Element der Ordnung 2, dann ist die Abb. ϕ geg. durch $\phi(\bar{0}) = \mathrm{id}_N$ und $\phi(\bar{1}) = \iota$ ein solcher Homomorphismus (Grund: Ist $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n, H eine Gruppe und $h \in H$ mit $\mathrm{ord}(h) \mid n$, dann existiert ein

Js
(n
d h
Erin
Ordn
$(\mathbb{Z}/n$
$N = \langle g$
maßen
wird g
durch τ

(eind. best.) Hom. $\phi : G \to H$ mit $\phi(g) = h$.
Wende dies auf $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $g = \bar{1}$, $H =$ $\mathrm{Aut}(N)$ und $h = \iota$ an.)

Betrachte die Abbildungen $\iota_1, \iota_2 : N \to N$ geg. durch $\iota_1(a, b, c) = (-a, b, c)$ und $\iota_2(a, b, c) = (a, -b, c)$ für $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Dies sind Automorphismen von N mit $\iota_1, \iota_2 \neq \mathrm{id}_N$ und $\iota_1^2 = \iota_2^2 = \mathrm{id}_N$, also Elemente der Ordn. 2.

(Grund: $\iota_1^2(a, b, c) = \iota_2(-a, b, c) = (-(-a), b, c)$
$= (a, b, c) \Rightarrow \iota_1^2 = \mathrm{id}_N$)

(ii

F20

2

Sei

Seien $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ die Homomorphismen zu ι_1, ι_2. Definiere

$G_1 = D_{1001}$, $G_2 = N \rtimes_{\phi_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G_3 = N \rtimes_{\phi_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

z.zg.: Die Gruppen G_1, G_2, G_3 sind paarweise nicht isomorph. Dafür überprüfen wir, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in allen drei Gruppen unterschiedlich sind.

In G_1 gibt es genau 1001 Elemente der Ordnung 2, die Spiegelung. (Keine Drehung des regelmäßigen 1001-Ecks hat Ordnung 2, weil 1001 ungerade ist).