## F23T2A1 (d) (Abschluss)

Da die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{Eig}(A, 0)$ zueinander orthogonal sind, bilden die normierten Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ON-Basis von $\mathrm{Eig}(A, 0)$.

Insgesamt ist $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren.

Übung Sei $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine ON-Basis von $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix $A$.

(b) Geben Sie eine orthogonale Matrix $T$ mit der Eigenschaft an, dass ${}^tTAT$ eine Diagonalmatrix ist.

# Die Jordansche Normalform

**Def.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K$ ein Körper. Eine *Jordanmatrix* über $K$ der Größe $n$ ist eine Matrix der Form $J = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$, wobei $\lambda \in K$ der Eigenwert der Jordanmatrix genannt wird. Eine Matrix $A \in M_{n,K}$ befindet sich in *Jordanscher Normalform* (JNF), wenn sie eine Blockgestalt der Form $\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r\end{pmatrix}$ hat, wobei $J_l$ für $1 \le l \le r$ eine Jordanmatrix ist. Man nennt $J_1, \dots, J_r$ die *Jordanblöcke* der JNF.

**Bem.** Ist $J \in M_{n,K}$ eine Jordanmatrix, dann gilt $\chi_J = \mu_J = (x-\lambda)^n$, wobei $\lambda \in K$ der Eigenwert von $J$ ist. Es gilt $\mu_a(J,\lambda) = n$ und $\mu_g(J,\lambda) = 1$.

**Satz:** Sei $n \in \mathbb{N}$, $K$ ein Körper und $A \in M_{n,K}$. Genau dann ist $A$ ähnlich zu einer Matrix $J$ in JNF, wenn $\chi_A$ Produkt von Linearfaktoren aus $K[x]$ ist.
In diesem Fall gilt weiter:

(i) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Elemente aus $K$, zu denen in $J$ Jordanblöcke mit entsprechenden Eigenwerten existieren, dann sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ genau die Eigenwerte von $A$.

(ii) Für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ ist $\mu_a(A, \lambda_j)$ gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_j$ in $J$.

(iii) Es ist $\mu_g(A, \lambda_j)$ jeweils die Anzahl der Jordanblöcke in $J$ zum Eigenwert $\lambda_j$.

(iv) Die Vielfachheit von $\lambda_j$ als Nullstelle von $\mu_A$ ist gleich der Größe des größten Jordanblocks in $J$ zum Eigenwert $\lambda_j$.

(v) Ist $J'$ eine weitere Matrix in JNF, die zu $A$ ähnlich ist, dann enthalten $J$ und $J'$ bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke.

## H16T3A1 (Übung: F20T2A1)

Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endl.-dim. $K$-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Wir setzen voraus dass das char. Pol. $\chi_\phi \in K[x]$ über $K$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $J$ eine Darstellungsmatrix von $\phi$ in Jordanscher Normalform. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Alle Eigenräume von $\phi$ sind 1-dim.

(ii) Zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ von $\phi$ gibt es in $J$ genau einen Jordanblock

(iii) Es gilt $\mu_\phi = \chi_\phi$

)

k-

…en voraus

K in Li-

…stellungs-

form

…agen äqui-

sind 1-dim.

K von $\phi$

einen Jordan-

(Hinweis: Nach Def. gilt $\chi_\phi = \chi_A$ für jede Darstellungsmatrix $A = M_B(\phi)$ bzgl. einer geordneten Basis $B$ von $V$, insbesondere also $\chi_\phi = \chi_J$. Die Eigenwerte von $\phi$ sind genau die Eigenwerte einer bel. Darstellungsmatrix $A$ wie oben, insb. also genau die Eigenwerte von $J$. Außerdem gilt für jeden Eigenwert $\lambda$ jeweils $\mu_g(\phi, \lambda) = \mu_g(A, \lambda)$, wobei $\mu_g = \mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ ist. Schließlich gilt noch $\mu_\phi = \mu_J$.)

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $\phi$. Nach (i) gilt $\mu_g(\phi, \lambda) = 1$.

un-

ahl

wert $\lambda_j$.

stelle

größten

ert $\lambda_j$

NF, die

J und J'

danblöcke.

Da $J$ Darstellungsmatrix von $\phi$ ist, gilt $\mu_g(J,\lambda) = \mu_g(\phi,\lambda) = 1$. Laut Vorlesung ist die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda$ gleich $\mu_g(J,\lambda)$. Es gibt somit genau einen Jordanblock zum Eigenwert $\lambda$ in $J$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von $\phi$ (und zugleich die Eigenwerte von $J$). Laut Vorlesung haben $\mu_\phi, \mu_J, \chi_\phi, \chi_J$ die Form

$$\mu_\phi = \mu_J = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j}, \quad \chi_\phi = \chi_J = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{n_j}$$

mit $1 \le m_j \le n_j$ für $1 \le j \le r$

(weil $\mu_J$ Teiler von $\chi_J$ ist). Laut Vorlesung ist $m_j$ jeweils die Größe des größten Jordanblocks in $J$ zum Eigenwert $\lambda_j$, und $n_j$ ist die Summe der Größen aller Jordanblöcke zu $\lambda_j$. Nach (ii) gibt es nur einen Jordanblock zu $\lambda_j$, dies ist der größte $\Rightarrow m_j = n_j$ für $1 \leq j \leq r \Rightarrow \mu_\phi = \chi_\phi$

„(iii) $\Rightarrow$ (i)" Seien $\lambda_j$, $m_j$, $n_j$ wie im vorherigen Schritt definiert. Nach Vor. gilt $m_j = n_j$ für $1 \leq j \leq r$. Ang. es gibt ein $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $\dim \operatorname{Eig}(\phi, \lambda_j) > 1$. $\Rightarrow$

$\mu_g(J, \lambda_j) = \mu_g(\phi, \lambda_j) = \dim \operatorname{Eig}(\phi, \lambda_j) > 1$

Laut Vorlesung ist $\mu_g(J, \lambda_j)$ die Anzahl der Jordanits-

A 1

$) = E_3$

$B \in M$

M. zu

un

blöcke zum Eigenwert $\lambda_j$, es gibt also mehr als einen Jordanblock zum Eigenwert $\lambda_j$. Damit ist die Summe der Größen aller Jordanblöcke $\lambda_j$ echt größer als die Größe des größten solchen Jordanblocks. $\Rightarrow n_j > m_j$ ↯ zu $m_j = n_j$. $\square$

<u>F13T1A5</u> Sei $M$ die Menge aller Matrizen $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{C}}$ mit $\chi_A = (x-1)^3$. Sei $G = GL_3(\mathbb{C})$

(a) Zeigen Sie, dass durch $(T,A) \mapsto TAT^{-1}$ eine Abbildung $\bullet : G \times M \to M$ und eine Operation von $G$ auf $M$ definiert ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation.

<u>zu (a)</u> Um zu zeigen, dass die Zuordnung eine Abb. $G \times M \to M$ ist, seien $T \in G$ und $A \in M$ vorgeg. z.zg.: $TAT^{-1} \in M$

$A \in M \Rightarrow \chi_A = (x-1)^3$. Da $TAT^{-1}$ zu $A$ ähnlich ist und ähnliche Matrizen dasselbe char. Pol. haben, gilt $\chi_{TAT^{-1}} = \chi_A = (x-1)^3$ und somit $TAT^{-1} \in M$. (Rest als Übung)

<u>zu (b)</u> [Vorüberlegung: Wegen $\chi_A = (x-1)^3$ ist für jedes $A \in M$ jeweils 1 der einzige Eigenwert. Da $\chi_A$ zerfällt, ist $A$

ähnlich zu einer Matrix in JNF. Ein Re-
präsentantensystem der Bahnen (= Ähnlichkeits-
klassen) sollte also aus Matrizen in JNF mit 1
als einzigem Eigenwert bestehen)

<u>Beh.</u>: $R = \{J_1, J_2, J_3\}$ mit

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist ein Repr.-system der Bahnen. Sei $B \subseteq M$
eine Bahn, also $B = G(A)$ für ein $A \in M$. Zu
überprüfen: $B$ enthält (i) höchstens ein
(ii) mindestens ein Element aus $R$.

b
Jo
Gr
grö
F1
m
(a)
b
M
(b) F

zu (i) Ang., es gibt $k, l$ mit $1 \leq k < l \leq 3$, so dass $J_k, J_l$ beide in $B$ liegen. $\Rightarrow$ $G(J_k) = G(A) = G(J_l) \Rightarrow J_l \in G(J_k)$ $\Rightarrow \exists T \in G$ mit $J_l = T \cdot J_k = T J_k T^{-1}$, d.h. $J_k$ und $J_l$ sind ähnlich. Da $\mu_g(J_i, 1) = i$ für $1 \leq i \leq 3$ gilt (geom. Vfh. von $1$ = Anz. Jordanblöcke zum Eigenwert $1$), ähnliche Matrizen aber für jeden Eigenwert dieselbe geom. Vfh. besitzen, sind $J_1, J_2, J_3$ paarweise nicht ähnlich $\lightning$.

zu (ii) Da $\chi_A$ in $\mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, ist $A$ ähnlich zu einer Matrix $J$ in JNF. Da 1 die einzige Nullst. von $\chi_A$ ist, sind alle Jordanblöcke in $J$ vom Eigenwert 1.

Es gilt $1 \leq \mu_g(A,1) \leq \mu_a(A,1) = 3$.

$\Rightarrow \mu_g(A,1) \in \{1,2,3\}$  $A, J$ ähnlich

$\Rightarrow \exists\, T \in G$ mit $T \cdot A = TAT^{-1} = J$.

1. Fall: $\mu_g(A,1) = 1$  Dann gilt auch $\mu_g(J,1) = 1$, und somit besteht $J$ nur aus einem Jordanblock. Da dieser von Größe 3 ist, gilt $J = J_1$ $\Rightarrow J \in R$ und $J = T \cdot A \in G(A)$, also $J \in B$.

M

(a)

ein

von

ist.

(b) Bes

(c)* Ze

ganz

(Hinweis

3 ,

$\Longrightarrow$

$J_k)$

$T^{-1}$ ,

(geom

m Ei-

ber für

VRfln.

weise

**2. Fall:** $\mu_g(A,1) = 3$ Dann hat $J$ drei Jordanblöcke, diese müssen wg. $J \in M_{3,\mathbb{C}}$ von Größe 1 sein $\Longrightarrow J = J_3$. Wie im 1. Fall folgt $J \in R$ und $J \in B$.

**3. Fall:** $\mu_g(A,1) = 2$ Dann existieren in $J$ genau zwei Jordanblöcke. Wegen $J \in M_{3,\mathbb{C}}$ muss einer davon Größe 1 und der andere Größe 2 haben. Da $J_2$ zwei Jordanblöcke dieser Größen enthält, sind $J$ und $J_2$ ähnlich, d.h. es gibt

$$J_2 = U \cdot J = U J U^{-1} \text{ für ein } U \in G.$$

...ren
...ex $J$
$\chi_A$ ist
...t 1.
...$B$.
...nlich
$= J$.
...lt auch
$J$ nur
...er von Größe
und $J = T \cdot A$

$\Rightarrow J_2 \in R$ und $J_2 = U \cdot J = U \cdot (T \cdot A)$
$= (UT) \cdot A \in G(A)$, also $J_2 \in B$. $\square$

<u>Übung</u> Sei $M \subseteq \mathcal{M}_{2,\mathbb{F}_2}$ die Menge aller Matrizen, deren char. Pol. in $\mathbb{F}_2[x]$ zerfällt.

(a) Zeigen Sie, dass durch $(T,A) \mapsto TAT^{-1}$ eine Abb. $\circ : G \times M \to M$ und eine Operation von $G$ auf $M$ definiert ist, wobei $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Op.

(c)* Zeigen Sie, dass die entsprechende Operation von $G$ auf ganz $\mathcal{M}_{2,\mathbb{F}_2}$ eine Bahn mehr enthält.

(Hinweis: Der Repräsentant der Bahn ist $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Verwenden Sie den Satz v. Cayley-Hamilton.)