# Charakteristischer Polynom und Minimalpol

Einsetzen einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ ($n \in \mathbb{N}$, $K$ Körper) in ein Polynom $f \in K[x]$: Ist $f = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_r \in K$), dann setzt man

$$f(A) = a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + \dots + a_1 A + a_0 E_n$$

<u>Def</u> (i) Das <u>charakteristische Polynom</u> einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ ist geg durch

Bsp

$\chi_A$

$\chi_A(A$

$$\chi_A = \det(x E_n - A) \in K[x].$$

(ii) Das <u>Minimalpolynom</u> von $A$ ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom minimalen Grades $\mu_A \in K[x]$ mit $\mu_A(A) = 0$.

<u>Satz</u>: (i) Die Eigenwerte von $A$ sind genau die Nullstellen von $\chi_A$ und zugleich genau die Nullstellen von $\mu_A$.

(ii) Ist $f \in K[x]$ mit $f(A) = 0$, dann folgt $\mu_A \mid f$.

(iii) Satz von Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = 0$ für alle $A \in M_{n,K}$ ($\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mu_A \mid \chi_A$)

(ii)

**Bem.**: Für jede Matrix $A \in M_{n,K}$ ist sowohl $\mu_A = \chi_A$ als auch $\mu_A \neq \chi_A$ möglich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_A = \chi_A = (x-2)^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_B = x-2 \,, \quad \chi_B = (x-2)^2$$

Bsp. für den Satz von Cayley-Hamilton:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n-
alen

Null-
Null-

$\mu_A \mid f$.
$(A) = 0$

$$= \begin{pmatrix}4&4\\0&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8&4\\0&8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

## Diagonalisierbarkeit

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$, $K$ ein Körper, $A \in M_{n,K}$.
A heißt *diagonalisierbar* $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, die zu A ähnlich ist, d.h. $\exists\, T \in GL_n(K)$ mit $D = TAT^{-1}$

(ii) Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich-dim. $K$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$

$\phi$ heißt *diagonalisierbar* $\Leftrightarrow$ Es gibt eine geordnete Basis $B$ von $V$, so dass $M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

*Erinnerung:* Seien $K$, $V$ und $\phi$ wie oben, außerdem $B$ eine beliebige geordnete Basis von $V$. Dann gilt:

$\phi$ ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $M_B(\phi)$ ist diagonalisierbar

de

(i)

(ii)

(iii)

K

fi

(In jede

für 1

Ergänzung: Ist $A \in M_{n,K}$ und $\phi_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$ geg. durch $v \mapsto Av$, dann gilt: A digonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\phi_A$ diagonalisierbar

Def.: Sei $A \in M_{n,K}$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert der Matrix A. Dann ist die **algebraische Vielfachheit** $\mu_a(A,\lambda)$ von $\lambda$ die Vielfachheit von $\lambda$ als Nullstelle von $\chi_A$. Die Zahl $\mu_g(A,\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda)$ wird die **geometrische Vielfachheit** von $\lambda$ genannt

zu

zu (i)

$B \in M$

Es
n $V$,
nal-

$\phi$ wie
lieGige
Dann

$M_B(\phi)$ ist
diagonali-
sierbar

## Diagonalisierbarkeitskriterium

Sei $A \in M_{n,K}$, und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$. Dann sind äquivalent

(i) $A$ ist diagonalisierbar

(ii) $K^n = \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_r)$

(iii) $\chi_A$ ist Produkt von Linearfaktoren aus $K[x]$, und es gilt $\mu_a(A, \lambda_i) = \mu_g(A, \lambda_i)$ für $1 \leq i \leq r$.

(In jedem Fall gilt $1 \leq \mu_g(A, \lambda_i) \leq \mu_a(A, \lambda_i)$ für $1 \leq i \leq r$.)

A ∈
nnn
lisierbar
K ein
ist die
(A, λ) von
Nullstelle
dim Eig(A, λ)
heit von

<u>F12T3A1</u> Sei $G = GL_4(\mathbb{C})$ und
$M = \{B \in M_{4,\mathbb{C}} \mid B^2 = E_4\}$
bereits gezeigt: Alle Matrizen aus $M$ sind diagonalisierbar.

<u>zu (b)</u>

(i) z.zg: Durch $(T, B) \mapsto TBT^{-1}$ ist eine Abb. $G \times M \to M$ definiert

(ii) Diese Abbildung liefert eine Gruppen-operation von $G$ auf $M$.

(iii) Es gibt genau 5 Bahnen bzgl. dieser Operation.

<u>zu (i)</u> Sei $T \in G$ und $B \in M$. z.zg.: $TBT^{-1} \in M$

$B \in M \Rightarrow B^2 = E_4 \Rightarrow (TBT^{-1})^2 =$

$(TBT^{-1})(TBT^{-1}) = TBE_4BT^{-1} = TB^2T^{-1}$

$= TE_4T^{-1} = TT^{-1} = E_4 \Rightarrow TBT^{-1} \in M$

<u>zu (ii)</u> Übung

<u>zu (iii)</u> bereits bekannt: Für jedes $B \in M$ gilt $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Eig}(B, 1) \oplus \mathrm{Eig}(B, -1)$, d.h. $\pm 1$ sind die einzigen Eigenwerte von $B$

<u>Beh.</u>: $R = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{= A_0}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{= A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{= A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{= A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{= A_4} \right\}$

ist Repräsentantensystem der Bahnen. (Wegen $|R| = 5$

G

hnliche

chas.

$(x-1)^{4-r}$

↯ $\square$

folgt daraus, dass es genau fünf Bahnen bzgl. der Operation gibt.) Sei $\mathcal{B}$ eine Bahn bzgl. der Operation, also $\mathcal{B} = G(B)$ für ein $B \in M$. Zu überprüfen: $\mathcal{B}$ enthält (1) mindestens ein (2) höchstens ein Element aus $R$.

zu (1) Wie in Teil (a) gezeigt, gilt $\mathbb{C}^4 = \mathrm{Eig}(B,-1) \oplus \mathrm{Eig}(B,1)$. (*)

Sei $r = \dim \mathrm{Eig}(B,-1)$ und $s = \dim \mathrm{Eig}(B,1)$ $\Rightarrow r+s = \dim \mathrm{Eig}(B,-1) + \dim \mathrm{Eig}(B,1) = \dim \mathbb{C}^4 = 4 \Rightarrow s = 4-r$

Sei $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B,-1)$ und $w_1, \dots, w_s$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B,1)$. Wegen (*) ist dann $\tilde{B} = (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ eine geordnete Basis

des $\mathbb{C}^4$. Wegen $Bv_j = (-1)v_j$ für $1 \le j \le r$
und $Bw_j = 1 \cdot w_j$ für $1 \le j \le s$ sind die
Spalten $s_1, \dots, s_4$ der Darstellungsmatrix
$M_{\tilde{B}}(\phi_B)$ geg. durch $-e_j$ für $j \le r$ und
$e_j$ für $j > r$. Es gilt $M_{\tilde{B}}(\phi_B) = A_r$.
Wegen $M_{\mathcal{E}}(\phi_B) = B$ (wobei $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_4)$
die Einheitsmatrix bezeichnet) sind $B$
und $A_r$ ähnlich zueinander, d.h. es gilt
$E_r = T \cdot B\, T^{-1}$ für ein $T \in G$.
$\Rightarrow E_r = T \cdot B \in G(B)$, und $E_r \in R$

zu (2) Ang., es gilt $E_r, E_s \in \underline{B}$ mit $0 \le r < s \le 4$. $E_r \in G(\mathbb{B}) \Rightarrow G(\mathbb{B}) = G(A_r)$, $E_s \in G(\mathbb{B}) \Rightarrow G(\mathbb{B}) = G(A_s)$ (weil die Bahnen eine Zerlegung von $M$ bilden) $\Rightarrow G(A_s) = G(A_r) \Rightarrow A_s \in G(A_r) \Rightarrow \exists T \in G$ mit $A_s = T \cdot A_r = T A_r T^{-1}$. Als ähnliche Matrizen müssten $A_r$ und $A_s$ dasselbe char. Polynom haben aber: $\chi_{A_r} = (x+1)^r (x-1)^{4-r}$, $\chi_{A_s} = (x+1)^s (x-1)^s \Rightarrow \chi_{A_r} \neq \chi_{A_s}$ ↯ □

**Def**: Sei $(V, b)$ ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension, also ein endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ mit einem Skalarprodukt $b$ (also eines symm. positiv definite Bilinearform).

Eine geordnete Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von $V$ (mit $n = \dim V$) wird <u>Orthonormalbasis</u> (ON-Basis) von $(V, b)$ genannt, wenn

$$b(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

Symm. positiv definite Bilinearform)

F23T2A1 (d) Bestimmen Sie eine ON-Basis bestehend aus Eigenvektoren des Endomorphismus $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2z \\ 0 \\ -2x+4z \end{pmatrix}$$

bekannt: Für die Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ sind die Spalten der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}(\phi)$ genau die Bilder $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$

$$\phi(e_1) = \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1-2\cdot 0 \\ 0 \\ -2\cdot 1+4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\phi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

, also
V mit
eines
arform)
$v_1, \dots, v_n)$
d
Basis)
falls $i = j$
falls $i \neq j$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bezeichne diese Matrix mit $A$.

Rechnung $\Rightarrow \chi_A = x^2(x-5)$ Nullstellen sind $0, 5$, also sind das die einzigen Eigenwerte von $A$.

Bestimmung der Eigenräume:

(i) Eigenwert $0$.

$$A - 0 \cdot E_3 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oberste Zeile entspricht $x - 2z = 0 \Rightarrow x = 2z$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

earform) | Basis ...

eine

vektoren

$\mathbb{R}^3$,

asis $\mathcal{E}=$

Spalten

b) genau

$(e_3)$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

(ii) Eigenwert 5

$$A - 5E_3 = \begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ obere Zeilen entsprechen $x + \frac{1}{2}z = 0$, $y = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,5) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -\frac{1}{2}z,\ y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\0\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Normierung liefert die ON-Basis $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A,5)$