

H2ZT1A1 (c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \mid ac \neq 0 \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \mid a \neq 0 \right\}$

Betrachte die Op. von U auf H durch Konjugation. ges. Repräsentantensystem der Bahnen

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in U, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in H \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & a_1 c_1^{-1} b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Beh.: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^\times, \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}$ ist

ein Repräsentantensystem der Bahnen

z. Zg.: Jede Bahn der Operation enthält genau ein Element aus R .

Sei also $B \subseteq H$ eine Bahn der Operation.

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q}$ mit $B = H \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

1. Fall: $b = 0$ Die Rechnung von oben zeigt,

dass $T \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Für alle $T \in U$ gilt $\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$

Damit enthält B genau ein Element aus R ,
nämlich $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2. Fall: $b \neq 0$ Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ Dann gilt $T \in U$,

und somit ist $T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} T^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ ein}$$

Element aus B , das zugleich in R liegt.

zur Eindeutigkeit. Ang., A ist ein weiteres Element in $B \cap R$. z.zg. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$A \in R \Rightarrow \exists a' \in \mathbb{Q}^*, \varepsilon \in \{0, 1\} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a' & \varepsilon \\ 0 & a' \end{pmatrix}$$

$$A \in B \Rightarrow \exists T \in U \text{ mit } A = T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} T^{-1} \quad T \in U \Rightarrow \exists a_2, c_2 \in \mathbb{Q}^*: T = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a' & \varepsilon \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{-1} & 0 \\ 0 & c_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a_2 c_2^{-1} b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a' = a, \varepsilon = a_2 c_2^{-1} b \xrightarrow[b \neq 0]{\varepsilon \in \{0, 1\}} a' = a, \varepsilon = 1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Erkennung: Sei G eine endliche Gruppe, $\cdot : G \times X \rightarrow X$ eine Operation von G auf einer Menge X , und $x \in X$. Dann gilt $|G(x)| = (G : G_x)$

F23T1A4(c) Sei q eine Primzahlpotenz mit $q > 1$ und K ein Körper mit q Elementen. Sei $G = GL_2(K)$

Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Bahn von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ unter der Operation von G auf $M_{2,K}$ durch Konjugation.

Die Bahn von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist geg. durch
 $G(A) = \{T \cdot A \mid T \in G\} =$

$\{TAT^{-1} \mid T \in GL_2(K)\}$, sie besteht
also genau aus den zu Ähnlichen Matrizen.

Es gilt $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$, wobei
 $e_1, e_2 \in K^2$ die Einheitsvektoren bezeichnen.

$$\Rightarrow A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = e_2 + e_1 = e_1 + e_2$$

$$\text{und } A(e_1 - e_2) = Ae_1 - Ae_2 = e_2 - e_1 = -(e_1 - e_2)$$

$\Rightarrow v = e_1 + e_2$ ist Eigenvektor von A zum
Eigenwert 1 , $w = e_1 - e_2$ ist Eigenvektor
von A zum Eigenwert -1

geg. durch $T \in G_D \Leftrightarrow TDT^{-1} = D$

$$\Leftrightarrow TDT^{-1}e_k = De_k \text{ für } k=1,2$$

$$\Leftrightarrow TDT^{-1}e_1 = De_1 = e_1$$

$$\text{und } TDT^{-1}e_2 = De_2 = -e_2$$

$$\Leftrightarrow DT^{-1}e_1 = T^{-1}e_1$$

$$\text{und } DT^{-1}e_2 = -T^{-1}e_2$$

$$\Leftrightarrow T^{-1}e_1 \in \text{Eig}(D, 1) \text{ und}$$

$$T^{-1}e_2 \in \text{Eig}(D, -1)$$

An der Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kann abgelesen werden, dass $\text{Eig}(D, 1) = \langle e_1 \rangle$ und $\text{Eig}(D, -1) = \langle e_2 \rangle$.

Sei T die Matrix mit den Spalten v, w ,
also $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $T^{-1}A =$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G(A)$$

$$\Rightarrow G(A) = G\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Es genügt also, $|G(D)|$ für $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
auszurechnen. Vorlesung $\Rightarrow |G(D)|$

$= (G : G_D)$ Es genügt also, die

Ordnung von G_D zu bestimmen

Für jedes $T \in G$ gilt die Äquivalenz

geg. durch $T \in GL_2 \Leftrightarrow TDT^{-1} = D$

$$\Leftrightarrow TDT^{-1}e_k = De_k \text{ für } k=1,2$$

verstehen $\Leftrightarrow TDT^{-1}e_1 = De_1 = e_1$

Matrizen und $TDT^{-1}e_2 = De_2 = -e_2$

obwohl $\Leftrightarrow DT^{-1}e_1 = T^{-1}e_1$

bezeichnen. und $DT^{-1}e_2 = -T^{-1}e_2$

$= e_1 + e_2$
 $v_1 = -(e_1 - e_2)$
 $\Leftrightarrow T^{-1}e_1 \in \text{Eig}(D, 1) \text{ und}$

$T^{-1}e_2 \in \text{Eig}(D, -1)$

A zum
invertierbar
An der Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kann ab-
gelesen werden, dass $\text{Eig}(D, 1) = \langle e_1 \rangle$
und $\text{Eig}(D, -1) = \langle e_2 \rangle$.

also: $T \in G_D \Leftrightarrow \exists a, b \in K^\times$ mit

$$T^{-1}e_1 = ae_1, T^{-1}e_2 = be_2 \Leftrightarrow \exists a, b \in K^\times:$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists c, d \in K^\times: T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

also: $G_D = |K^\times| \cdot |K^\times| = (q-1)(q-1) = (q-1)^2$

(*) Die Ordnung von $G = GL_2(K)$ ist gegeben durch

$$|G| = (q^2-1)(q^2-q) = (q-1)(q+1)q \cdot (q-1) = q(q-1)^2(q+1)$$

(lt. Vorlesung oder als Übung)

$$|G(D)| = (G : G_D) = \frac{|G|}{|G_D|} = \frac{q(q-1)^2(q+1)}{(q-1)^2} = q(q+1) \quad \square$$

alternativ: Sei $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$

$$T \in G_A \iff TAT^{-1} = A \iff TA = AT \iff$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\iff b=c, a=d \quad \text{also: } T \in G_D \iff$$

$$\forall a, b \in K : T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad T \text{ invertierbar} \rightarrow$$

$$\det(T) \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \iff a^2 + b^2$$

1. Fall: $a=0$ Dann kann b in $K \setminus \{0\}$ gewählt werden $\Rightarrow q-1$ Möglichkeiten für b

2. Fall: $a \neq 0$ Dann muss b in
 $K \setminus \{\pm a\}$ gewählt werden. $\Rightarrow$
 jeweils $q-2$ Möglichkeiten für b
 $\Rightarrow$ insgesamt $(q-1)(q-2)$ Möglichkeiten
 für das Paar (a, b) in diesem Fall,
 in beiden Fällen zusammen

$$\begin{aligned} q-1 + (q-1)(q-2) &= q-1 + q^2 - 3q + 2 \\ &= q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2 \quad \text{Rest wie ab} \\ &\quad (*) \text{ oben} \end{aligned}$$

also
 (*)
 Die

$|G| =$
 (lt. Vor
 $|G(D)|$

Ich denke immer noch, dass es ein sinnvoller Vereinfachungsschritt ist, zunächst festzustellen, dass die Bahn $G(A)$ mit der Bahn $G(D)$ der Diagonalmatrix D übereinstimmt. Andererseits scheint es aber einfacher zu sein, bei der Bestimmung des Stabilisators G_D mit der Matrix $T \in G$ explizit zu rechnen (wie beim alternativen Lösungsweg), statt über die Eigenräume zu argumentieren, wie ich das bei der ersten Variante gemacht habe.

Deshalb kommt hier noch einmal die entsprechende Rechnung mit der Diagonalmatrix D . Sei $T \in G$ mit

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann gilt die Äquivalenz

$$T \in G_D \Leftrightarrow TDT^{-1} = D \Leftrightarrow TD = DT \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -b \wedge c = -c \Leftrightarrow b = c = 0.$$

Also ist auch T eine Diagonalmatrix, mit Einträgen $a, d \in K^\times$. Für beide Einträge gibt es jeweils $q - 1$ Möglichkeiten. Daraus folgt $|G_D| = (q - 1)^2$. Die etwas umständliche Fallunterscheidung, wie beim alternativen Lösungsweg, entfällt hier.

F12 T3A1 Sei $G = GL_4(\mathbb{C})$ und

$$M = \{ B \in M_{4,\mathbb{C}} \mid B^2 = E_4 \} \quad x^2 - 1$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Matrizen in M diagonalisierbar sind.

(b) Weisen Sie nach, dass durch
 $\bullet : G \times M \rightarrow M, (T, A) \mapsto TAT^{-1}$

ein wohldefinierte Gruppenoperation
gegeben ist, und dass es genau 5 Bahnen
bezüglich dieser Operation gibt.

1. Fall
werden

zu (a) Sei $B \in M$, d.h. $B^2 = E_4$.

z.zg: B ist diagonalisierbar

überprüfe: $\mathbb{C}^4 = \text{Eig}(B, 1) \oplus \text{Eig}(B, -1)$

Daraus folgt (laut Vorlesung) die
Diagonalisierbarkeit

" $\supseteq$ " offensichtlich, da jeder Eigenraum
von B Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$ ist

" $\subseteq$ " Sei $v \in \mathbb{C}^4$. $B^2 = E_4 \Rightarrow B^2 v = v$

Setzen wir $w = Bv$, dann gilt also

$$w = Bv \text{ und } v = B^2 v = Bw$$

Sei nun $u = \frac{1}{2}(v+w)$, $u' = \frac{1}{2}(v-w)$

zu (i)

zu (ii)

$$Bu = \frac{1}{2}Bv + \frac{1}{2}Bw = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w = u$$

$$\Rightarrow u \in \text{Eig}(B, 1)$$

$$Bu' = \frac{1}{2}Bv - \frac{1}{2}Bw = \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}v = -u'$$

$$\Rightarrow u' \in \text{Eig}(B, -1)$$

$$\text{au\sserdem: } v = u + u' \Rightarrow$$

$$v \in \text{Eig}(B, 1) \oplus \text{Eig}(B, -1)$$

zu (b) Wir \u00fcberpr\u00fcfen zun\u00e4chst, dass
durch $(T, A) \mapsto TAT^{-1}$ eine Abb.

$G \times M \rightarrow M$ geg. ist. Sei also $T \in G$

und $B \in M$, also $B^2 = E_4$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (TBT^{-1})^2 &= TBT^{-1}TBT^{-1} = TBEBT^{-1} \\ &= T(B^2)T^{-1} = TE_4T^{-1} = TT^{-1} = E_4 \end{aligned}$$

und somit $TBT^{-1} \in M$.

Überprüfe nun, dass die Abb. $\circ : G \times M \rightarrow M$

eine Operation von G auf M

definiert zu zeigen:

(i) $\forall B \in M : E_4 \circ B = B$

(ii) $\forall T, U \in G : T \cdot (U \cdot B) = (TU) \cdot B$

zu i) Sei $B \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_4 \circ B &= E_4 B E_4^{-1} = E_4 B E_4 \\ &= E_4 B = B \end{aligned}$$

zu ii) Seien $T, U \in G$ und $B \in M$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } T \cdot (u \cdot B) &= T \cdot (u B u^{-1}) = \\ &= T(u B u^{-1}) T^{-1} = (T u) B (T u)^{-1} = \\ &= (T u) \cdot B. \end{aligned}$$

ass

bb.

$T \in G$

folgt

$T B T^{-1}$