Gruppenoperationen

Def. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Operation von G auf X = Abb.

$\circ : G \times X \to X$ mit den Eigenschaften

(i) $e_G \circ x = x \quad \forall x \in X$

(ii) $g \circ (h \circ x) = (gh) \circ x \quad \forall g, h \in G, x \in X$

Def.: Sei $\circ : G \times X \to X$ eine Gruppen-

Def.: Sei G eine Gruppe und X eine Menge.
Operation von G auf X = Abb.

Beispiele
(i) Für

Operation wie oben. Sei $x \in X$.

(i) Die Teilmenge $G_x = \{g \in G \mid g \circ x = x\} \subseteq G$ wird der Stabilisator von x genannt. Dies ist eine Untergruppe von G.

(ii) Die Teilmenge $G(x) = \{g \circ x \mid g \in G\}$ von X heißt die Bahn von x unter der Operation.

Bem. Man kann zeigen, dass die Bahnen der Operation eine Zerlegung von X bilden. Gibt es nur eine Bahn, gilt also $G(x) = X$ für ein (und damit auch für alle) $x \in X$, dann nennt man die Operation _transitiv_.

Beispiele:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper K gibt es eine Operation von $G = GL_n(K)$ auf $V = K^n$, definiert durch $G \times V \to V$, $(A, v) \mapsto Av$.
Durch Einschränkung erhält man auch eine Operation jeder Untergruppe von G auf V,
z.B. eine Op. von $O(n)$ (= orthogonale Gp.) auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiele

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper K gibt

$\leq G$

es

X

ein

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ operiert $G = S_n$ (symm. Gruppe) auf $M_n = \{1, \dots, n\}$, und zwar durch $\sigma \cdot k = \sigma(k)$ $\forall k \in M_n$, $\sigma \in S_n$.

Bsp. für einen Stabilisator:

$G = S_4 \Rightarrow G_3 = \{id, (12), (14), (24), (124), (142)\}$

Diese Operation ist immer <u>transitiv</u>, denn:

Für $2 \leq k \leq n$ gilt $(1\,k) \cdot 1 = k \Rightarrow k \in S_n(1)$

außerdem: $1 = id \cdot 1 \in S_n(1)$, insg.: $S_n(1) = M_n$

Durch Einschränkung erhält man auch für jede Untergr. U von S_n eine Op. von U auf M_n. Man nennt U eine transitive Untergruppe von S_n, wenn diese Operation transitiv ist.

Bsp. für eine nicht-transitive Op.:

$U = \{id, (12), (34), (12)(34)\} \leq S_4$

Bahnen: $U(1) = \{1, 2\} = U(2)$

$U(3) = \{3, 4\} = U(4)$

Stabilisatoren: $U_1 = \{id, (34)\} = U_2$

$U_3 = \{id, (12)\} = U_4$

Im Gegensatz zu U ist die Kleinsche Vierergruppe $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ eine transitive Untergr. von S_4.

(iii) Für jede Gruppe G ist eine Operation von G auf G (als Menge) definiert durch $g \circ h = g h g^{-1}$, die <u>Operation durch Konjugation</u>. (nur transitiv falls $G = \{e\}$).

(Anwendungen: Klassengleichung, 0-te Sylowsatz, Auflösbarkeit von Gruppen von Primzahlordnung, Gruppen der Ordnung p^2 sind abelsch)

Viere-
(23)}
ation
t durch
Konju-
).
O-ter Sylow-
imzahlordnung,
h)

(iv) Operation durch Linkstrans-
lation: Ist G eine Gruppe, dann ist durch $\circ : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$ eine Operation von G auf G definiert. Diese ist immer transitiv.
(Anwendung: Satz von Cayley)

(v) Ist G eine Gruppe und $\mathcal{U}$ die Menge der Untergruppen von G, dann ist $\circ : G \times \mathcal{U} \to \mathcal{U},\ (g, U) \mapsto gUg^{-1}$ eine Operation von G auf $\mathcal{U}$ (Operation durch Konjugation).

ch

Op.

ine

wenn

t.

Op:

$)\} \leq S_4$

(2)

$)\} = U_2$

Def: Sei $\cdot : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation, $\mathcal{B}$ die Menge der Bahnen und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Man nennt eine Teilmenge $R \subseteq X$ ein **Repräsentantensystem** von $\mathcal{S}$, wenn jedes $B \in \mathcal{S}$ genau ein Element aus R enthält, und jedes $s \in S$ in einem $B \in \mathcal{S}$ liegt.

Def: Ein $x \in X$ heißt **Fixpunkt** der Operation, wenn $g \cdot x = x \ \forall g \in G$ gilt (gleichbed.: $G(x) = \{x\}$)

F23T3A1 Sei $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $X = \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $*: G \times X \to X$, $(a, v) \mapsto av$ eine Operation von G auf X definiert ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte der Operation.

(c) Zeigen Sie, dass $R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \cup \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation ist.

zu (a) zu überprüfen (1) $\forall v \in \mathbb{R}^3 : 1 \circ v = v$

(Beachte: 1 ist Neutralelt. von G)

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \; \forall v \in \mathbb{R}^3 : a \circ (b \circ v) = (ab) \circ v$

zu (1) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $1 \circ v = 1 \cdot v = v$.

skalare Mult. auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$

zu (2) Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $v \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$a \circ (b \circ v) = a \circ (bv) = a(bv) = (ab)v$$
$$= (ab) \circ v$$

zu

=

ti

We

=

ges

zu (c)

z.zg

B is

B =

zu (b) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ gilt $a \bullet 0_{\mathbb{R}^3} = a \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$, also ist $0_{\mathbb{R}^3}$ ein Fixpunkt der Operation. Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Fixpunkt. Wegen $2 \in \mathbb{R}^+$ gilt dann $2 \bullet v = v \Rightarrow 2v = v \Rightarrow v + v = v \overset{-v}{\Rightarrow} v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Also ist $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ die gesamte Fixpunktmenge der Operation.

zu (c) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Bahn der Operation.

z.zg. B enthält genau ein Element aus R.

B ist Bahn der Op. $\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^3$, so dass

$B = G(v) = \{a \bullet v \mid a \in G\} = \{av \mid a \in \mathbb{R}^+\}$

1. Fall: $v = 0_{\mathbb{R}^3}$ Dann gilt $B = \{a \cdot 0_{\mathbb{R}^3} \mid a \in \mathbb{R}^+\}$
$= \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Es gilt also $0_{\mathbb{R}^3} \in B$, $0_{\mathbb{R}^3} \in R$,
und offenbar liegt kein weiteres Element aus R in B.

2. Fall: $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ $\Rightarrow \|v\| \in \mathbb{R}^+$ Sei $a = \|v\|^{-1}$ $(\Rightarrow a \in \mathbb{R}^+)$.
Dann liegt $w = a \cdot v = a \circ v$ in B, und wegen
$\|w\| = a \cdot \|v\| = a \cdot a^{-1} = 1$ liegt w auch in R.

Eindeutigkeit: Sei $w' \in R$ mit $w' \in B$.
z.zg: $w' = w$ $\quad w' \in B \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^+$ mit $w' = b \circ v = b v$.
Es gilt $w' \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, weil alle Elemente aus B
die Form $a \cdot v$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ haben und $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ gilt.

$w' \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ und $w' \in R \Rightarrow \|w'\| = 1$

$\Rightarrow \|b \cdot v\| = 1 \Rightarrow b \cdot \|v\| = 1 \Rightarrow$

$b \cdot a^{-1} = 1 \Rightarrow b = a \Rightarrow w' = a \cdot v = w$

$\square$

<u>Übung:</u>

Bestimmen Sie ein Repräsentanten-system der Bahnen für folgende Gruppenoperationen (mit Nachweis).

(a) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^2$,

$\cdot : G \times X \to X$, $(A, v) \mapsto Av$

(b) $G = O(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA A = E_2\}$

$= \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^2 : \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle\}$

H

U

H =

Best

Bahn

durch

Sei T

A =

$v = w$

$\square$

…nten-

…gende

…Nachweis).

$\mapsto Av$

$\mid {}^tAA = E_2\}$

$\in \mathbb{R}^2 : \langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle\}$

$X = \mathbb{R}^2$, $\cdot : G \times X \to X$, $(A, v) \mapsto Av$

H22T1A1 (c)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \;\middle|\; ac \neq 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \;\middle|\; a \neq 0 \right\}$$

Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen bzgl. der Operation von U auf H durch Konjugation.

Sei $T \in U$ und $A \in H$, $T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $a_1, c_1, a, b \in \mathbb{Q}$, $a, a_1, c_1 \neq 0$

Dann ist $T \circ A = TAT^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a & a_1 b \\ 0 & c_1 a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & a_1 c_1^{-1} b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

[Überlegung: Die Rechnung zeigt, dass die Bahn $U(A)$ im Fall $b = 0$ die Form $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\}$ hat, und im Fall $b \neq 0$ die Form $\left\{\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q}^\times \right\}$ $\Rightarrow$ Kandidat für ein Repr.-system $R = \left\{\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Q}^\times, \varepsilon \in \{0,1\} \right\}$.]