

Wdh.

i) Ist $\varphi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhom.
und $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \ker(\varphi)$, dann
nennt man die Abb. $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow H$
geg. durch $\bar{\varphi}(gN) = \varphi(g) \quad \forall g \in G$
den durch φ induzierten Hom.

iii) Homomorphiesatz: Ist $\varphi: G \rightarrow H$

ein surjektiver Gruppenhom. und $N = \ker(\varphi)$, dann ist der induzierte Hom.
 $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow H$ ein Isomorphismus
 (insb. gilt also $G/N \cong H$).

122T1A1 Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \mid ac \neq 0 \right\}$
 die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen und
 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a=c \right\}$. Zeigen Sie, dass^(*)
 $\bar{\varphi}: G/H \rightarrow \mathbb{Q}^\times, \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right] \mapsto \frac{a}{c}$ ein

wohldefinierter Gruppenisomorphismus ist.
(*) H Normalteiler von G und

Betrachte die Abb. $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \frac{a}{c}$

(zur Notation: $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]$ bedeutet $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} H$.)

Um auf φ den Homomorphiesatz anwenden zu können, müssen wir überprüfen:

(i) φ ist ein Gruppenhom

(ii) φ ist surjektiv (Es ist $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.)

(iii) $\ker(\varphi) = H$

Aus Teil (ii) folgt auch, dass H (als Kern eines Gruppenhom.) ein Normalteiler von G ist.

zu (i) Seien $A, B \in G$. z.zg. $\varphi(AB) = \varphi(A) \varphi(B)$

$A, B \in G \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $d, e, f \in \mathbb{Q}$

mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ und $ac \neq 0$, $df \neq 0$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(AB) = \frac{ad}{cf} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{f} = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

zu (ii) Sei $r \in \mathbb{Q}^*$. Dann

gilt $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ (wegen $r \cdot 1 = r$

$\neq 0$) und $\varphi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{r}{1} = r$.

zu (iii) Sei $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $ac \neq 0$.

Dann gilt die Äquivalenz

$$A \in \ker(\varphi) \iff \varphi(A) = 1$$

$$\iff \frac{a}{c} = 1 \stackrel{c \neq 0}{\iff} a = c$$

wg $ac \neq 0$

$$\iff A \in H.$$

Ze

iso

Beh

ϕ

zu über

(ii) ϕ

(iii) $\ker$

zu (i) Sei

$\phi(a+b)$

$A \in L_2(\mathbb{C}) \Rightarrow \det(A) = 1$ (1.1)

Auf Grund des Homomorphiesatzes
existiert ein wohldefinierter Gruppenisom.

$$G/H \rightarrow \mathbb{Q}^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} H \mapsto \frac{a}{c}, \text{ und}$$

dieses stimmt mit der angeg. Abb. $\bar{\varphi}$
überein. $\square$

Beispiel für einen schwächeren
Surjektivitätsnachweis

Aufgabe Sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a+ib \mid$
 $a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der Gauß'schen
Zahlen und $(1+i)$ das von $1+i$ erzeugte

Hauptideal, also $(2+i) = \{ \alpha \cdot (1+i) \mid \alpha \in \mathbb{Z}[i] \}$
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ zur Gruppe $(\mathbb{Z}[i]/(1+i), +)$
isomorph ist.

Betrachte die Abb.

$$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i]/(1+i), \quad a \mapsto a + (1+i)$$

zu überprüfen: (i) ϕ ist Gruppenhom

(ii) ϕ ist surjektiv.

(iii) $\ker(\phi) = 2\mathbb{Z}$

zu i) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\phi(a+b) = a+b + (1+i) = (a + (1+i)) + (b + (1+i))$$

$$= \phi(a) + \phi(b)$$

zulii) Sei $\bar{r} \in \mathbb{Z}[i]/(1+i)$, $\bar{r} =$
 $a+ib+(1+i)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} [1+i+(1+i) &= 0+(1+i) \Rightarrow \\ 1+(1+i) + i+(1+i) &= 0_{\mathbb{Z}[i]/(1+i)} \\ \Rightarrow i+(1+i) &= -1+(1+i)] (*) \end{aligned}$$

$$a+ib+(1+i) =$$

$$(a+(1+i)) + (i+(1+i)) \cdot (b+(1+i))$$

$$\stackrel{(*)}{=} (a+(1+i)) + (-1+(1+i)) \cdot (b+(1+i))$$

$$= a-b+(1+i) = \phi(a-b)$$

zuliii) Übung



FBT1A3 (V) Sei q eine Primzahlpotenz mit $q > 1$ und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung $|\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)|$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes die Ordnung $|\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_q)|$.

zu (a) Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{F}_q)$ genau dann invertierbar ist, wenn das Tupel (u, v, w) ihrer drei Spaltenvektoren $u, v, w \in \mathbb{F}_q^3$ linear

unabhängig ist. Dies ist genau dann der Fall,
 wenn $u \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{0_{\mathbb{F}_q^3}\}$ und $v \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \langle u \rangle_{\mathbb{F}_q}$ und
 $w \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \langle u, v \rangle_{\mathbb{F}_q}$ gilt. Wegen $|\mathbb{F}_q^3 \setminus \{0\}| =$
 $q^3 - 1$ gibt es für u genau $q^3 - 1$ Möglichkeiten.
 $u \neq 0 \Rightarrow |\langle u \rangle_{\mathbb{F}_q}| = q \Rightarrow |\mathbb{F}_q^3 \setminus \langle u \rangle_{\mathbb{F}_q}| =$
 $q^3 - q$ Möglichkeiten für v .
 (u, v) linear unabh. $\Rightarrow \dim \langle u, v \rangle_{\mathbb{F}_q} = 2 \Rightarrow$
 $|\langle u, v \rangle_{\mathbb{F}_q}| = q^2 \Rightarrow |\mathbb{F}_q^3 \setminus \langle u, v \rangle_{\mathbb{F}_q}| = q^3 - q^2$
 Möglichkeiten für w .

Der Hom.-satz liefert $GL_3(\mathbb{F}_q)/SL_3(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^*$

Insgesamt gibt es also $(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)$
Möglichkeiten, das Tupel (u, v, w) zu wählen

$$\Rightarrow |GL_3(\mathbb{F}_q)| = (q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)$$

zu (b) Betrachte die Abb.

$$\phi: GL_3(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{F}_q, A \mapsto \det(A)$$

Da jedes $A \in GL_3(\mathbb{F}_q)$ invertierbar ist und
somit $\det(A) \neq 0$, ist ϕ eine Abb.

$GL_3(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{F}_q^*$. Der Multiplikationssatz
für Determinanten liefert $\phi(AB) = \det(AB)$

$= \det(A) \det(B) = \phi(A) \phi(B)$, d.h. ϕ ist ein Gruppenhom. Wegen

$$A \in \ker(\phi) \iff \phi(A) = \bar{1} \iff \det(A) = \bar{1} \\ \iff A \in SL_3(\mathbb{F}_q) \quad \forall A \in GL_3(\mathbb{F}_q) \text{ gilt} \\ \ker(\phi) = SL_3(\mathbb{F}_q).$$

Der Hom. ist auch surjektiv, denn: Ist $a \in \mathbb{F}_q^\times$ vorgeg., dann liegt $A = \begin{pmatrix} a & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_q)$ (wegen $\det(A) = a \neq \bar{0}$) und $\phi(A) = \det(A) = a$.

Der Hom.-satz liefert $GL_3(\mathbb{F}_q)/SL_3(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^\times$.

$$\Rightarrow q-1 = |\mathbb{F}_q^\times| = |GL_3(\mathbb{F}_q)/SL_3(\mathbb{F}_q)|$$

$$= (GL_3(\mathbb{F}_q) : SL_3(\mathbb{F}_q)) \stackrel{\text{Lagrange}}{=}$$

$$\frac{|GL_3(\mathbb{F}_q)|}{|SL_3(\mathbb{F}_q)|} \stackrel{(a)}{=} \frac{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}{|SL_3(\mathbb{F}_q)|}$$

$$\Rightarrow |SL_3(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^3-1)(q^3-q)q^2(q-1)}{q-1}$$

$$= q^2 \cdot (q^3-1)(q^3-q)$$