

H23TZA3

(c) Sei G eine Gruppe der endlichen Ordnung n mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jeden Teiler $k \in \mathbb{N}$ von n existiert in G eine Untergruppe der Ordnung k .

(ii) G ist nicht abelsch.

Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

(c) Sei G eine Gruppe der endlichen

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass n keine Primzahl ist. Sei nun p der kleinste Primteiler von n . Nach (i) existiert eine Untergruppe U von G mit $|U| = \frac{n}{p}$.

Betrachten Sie die Operation von U auf G/U geg. durch $\cdot : U \times G/U \rightarrow G/U$,

$(u, gU) \mapsto (ug)U$. Zeigen Sie mit

Hilfe der Bahngleichung, dass $U \trianglelefteq G$ gilt.

Faktorgruppen

Erinnerung: Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$.

Dann existiert auf der Menge $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ eine Verknüpfung $*$ mit der Eigenschaft

$$(gN) * (hN) = (gh)N \quad \forall g, h \in G$$

Das Paar $(G/N, *)$ ist dann eine Gruppe, die sog. Faktorgruppe von G modulo N

(Neutralement $e_{G/N} = N = e_G N$,

Inverse: $(gN)^{-1} = g^{-1}N$)

Erinnerung: Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$.

Bem. • Es gibt einen sog. Hom. $\pi_N: G \rightarrow G/N$
geg. durch $\pi_N(g) = gN \quad \forall g \in G$, der sog.
kanonische Epimorphismus

• Für alle $g, h \in G$ gilt die Äquivalenz
 $gN = hN \iff h \in gN \iff g \in hN$
 $\iff h^{-1}g \in N \iff g^{-1}h \in N$, insbesondere:
 $gN = N \iff g \in N$

• Ordnung von G/N (falls G endlich)

$$|G/N| = (G:N) = \frac{|G|}{|N|}$$

Erinnerung: Ordnung von Gruppen-
elementen Sei G eine Gruppe

(i) Def: Die Ordnung von $g \in G$
ist definiert durch $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$
(Es gilt $\text{ord}(g) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.)

(ii) Für jedes $g \in G$ endlicher Ord-
nung ist $\text{ord}(g)$ das kleinste n
 $\in \mathbb{N}$ mit $g^n = e_G$.

(iii) Für $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
 $\text{ord}(g) = n$ genau dann, wenn gilt:
 $g^m = e_G \iff n \mid m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

zu (a)
Gruppe
Ordnung
Sei $\bar{g}$
Schreib
 $\rightarrow \bar{g} =$

(iv) Ist G endlich, dann gilt
 $\text{ord}(g) \mid |G| \quad \forall g \in G$

(v) Ist $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass
 $g^n = e_G$ und $g^{n/p} \neq e_G$ für alle Prim-
teiler p von n gilt, dann folgt
 $n = \text{ord}(g)$

(Bsp: $g^{48} = e$, $g^{24} \neq e$, $g^{16} \neq e \Rightarrow \text{ord}(g) = 48$)

(vi) Sei $g \in G$ mit der endl. Ordnung n .

• $m \in \mathbb{Z}$, $\text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow \text{ord}(g^m) = n$

• $d \in \mathbb{N}$ Teiler von $n \Rightarrow \text{ord}(g^d) = \frac{n}{d}$

• $m \in \mathbb{Z}$ bel. $\Rightarrow \text{ord}(g^m) = \frac{n}{\text{ggT}(m, n)}$

F13TZA1 Übung: H17T3AZ, H18T2A3

(a) Bestimmen Sie alle Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie ebenso alle Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

zu (a) [Aus Teil (iii) folgt: Ist G eine Gruppe, so hat $g \in G$ genau dann endl. Ordnung, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$ existiert.]

Sei $\bar{g} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow \exists g \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{g} = g + \mathbb{Z}$

Schreibe $g = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \bar{g} = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ [Bsp. $\bar{g} = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$

$$2 \cdot \bar{g} = \bar{g} + \bar{g} = (\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) + (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$$

$$= 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

$$\uparrow 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \bar{g} \neq 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \text{ also: } \text{ord}(\bar{g}) = 2$$

[Potenzen in Faktorgruppen: $(gN)^m = g^m N$
in additiver Schreibweise: $m(g+N) = mg + N$]

$$\text{Es gilt } b \cdot \bar{g} = b \cdot (g + \mathbb{Z}) = bg + \mathbb{Z}$$

$$= b \cdot \frac{a}{b} + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

$$\uparrow a \in \mathbb{Z}$$

Also hat $\bar{g}$ eine endliche Ordnung
(und es gilt $\text{ord}(\bar{g}) \mid b$). Also ist
die Menge der Elemente endlicher Ord-
nung die gesamte Menge $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

$$\text{ord}(g) = 48$$

Ordnung n

$$\text{ord}(g^n) = n$$

$$\text{ord}(g^d) = \frac{n}{d}$$

$$= \frac{n}{\text{ggT}(m, n)}$$

20 (b) Elemente endl. Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

Ang. $\bar{g} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist ein Element der endlichen Ordnung n .

$$\Rightarrow n\bar{g} = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \quad \bar{g} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \text{ mit } \bar{g} = r + \mathbb{Z}$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow n(r + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \Rightarrow nr + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow nr \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}: nr = a \Rightarrow r = \frac{a}{n} \in \mathbb{Q}$$

Die Teilmenge der Elemente endlicher Ordnung ist also enthalten in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Nach Teil (a) haben alle Elemente in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endl. Ordnung. Also ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ genau die Teilmenge der Ekt. endlicher Ord-

die Elemente in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endl. Ordnung. Also ist
 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ genau die Teilmenge des Fld. endlicher Ord-
nung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Elemente endl. Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$:

Ang. $\bar{g}$ ist ein Element der endl. Ordnung n .

$$\Rightarrow n\bar{g} = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \quad \bar{g} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \bar{g} = r + \mathbb{Q}$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow n \cdot (r + \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Rightarrow nr + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow nr \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists s \in \mathbb{Q} : nr = s \Rightarrow r = \frac{s}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow r + \mathbb{Q} = \mathbb{Q} = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \Rightarrow \bar{g} = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$$

Da das Neutralelement immer endliche Ordnung hat,
ist $\{0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}\}$ die gesamte Menge der Fld. endl. Ordn. in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. $\square$

Übung Bestimmen Sie die Menge der Elemente endl. Ordnung in folgenden Gruppen: (a) $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{R}/\frac{2}{3}\mathbb{Z}$
(c) $\mathbb{R}/\sqrt{2}\mathbb{Z}$

Def. Sei $\phi: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann existiert ein Hom.

$\bar{\phi}: G/N \rightarrow H$ gegeben durch

$\bar{\phi}(gN) = \phi(g) \quad \forall g \in G$. Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Homomorphiesatz

Sei $\phi: G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $N = \ker(\phi)$.

Dann ist der induzierte Homom.

$\bar{\phi}: G/N \rightarrow H$ ein Isomorphismus, insb. gilt also $G/N \cong H$.

Beispiele für die Anwendung des Homomorphiesatzes

$$\text{li) } (G \times H) / (\ker \gamma \times H) \cong G$$

wobei G, H bel. Gruppen

$$\text{lii) } \mathbb{Q}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

zu li) Betrachte die Abbildung

$$\phi: G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \quad \text{Dies}$$

ist bekanntlich ein Homomorphismus.

überprüfe: (1) ϕ ist surjektiv

$$(2) \ker(\phi) = \ker \gamma \times H$$

zu (1) Sei $g \in G$. Dann ist $\phi(g, e_H) = g$.

zu (2) Sei $(g, h) \in G \times H$. Es gilt die Äquivalenz $(g, h) \in \ker(\phi) \iff \phi(g, h) = e_G$
 $\iff g = e_G \iff (g, h) \in \{e_G\} \times H$.

Also kann der Hom.-Satz angewendet werden und liefert einen Isom. $(G \times H) / (\{e_G\} \times H)$
 $= (G \times H) / \ker(\phi) \cong G$

zu (2) [Wir suchen eine passende Abb.

$\phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Diese muss so gewählt werden, dass $\ker(\phi) = \mathbb{Z}$ gilt
 $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ Um zu verhindern, dass $1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$

im Kern landet, bilden wir 1 nicht auf $1 + \mathbb{Z}$, sondern auf $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ab.]

Betrachte die Abb. $\phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
 $r \mapsto \frac{1}{2}r + \mathbb{Z}$.

überprüfe: (1) ϕ ist ein Gruppenhom.

(2) ϕ ist surjektiv.

(3) $\ker(\phi) = 2\mathbb{Z}$.

zu (1) Seien $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(r+s) &= \frac{1}{2}(r+s) + \mathbb{Z} = \\ &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s\right) + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{2}r + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{1}{2}s + \mathbb{Z}\right) \\ &= \phi(r) + \phi(s)\end{aligned}$$

zu (2) Sei $\tau + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, mit $\tau \in \mathbb{Q}$

$$\phi(2\tau) = \frac{1}{2}(2\tau) + \mathbb{Z} = \tau + \mathbb{Z}$$

zu (3) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt die

Äquivalenz $r \in \ker(\phi) \iff$

$$\phi(r) = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \iff \frac{1}{2}r + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\iff \frac{1}{2}r \in \mathbb{Z} \iff \exists a \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2}r = a$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{Z} : r = 2a \iff r \in 2\mathbb{Z}$$

□