

Gruppentheorie

Def. Gruppe = Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer Verknüpfung $\cdot$ auf G , so dass gilt

(i) $\forall a, b, c \in G: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(ii) Es gibt ein $e \in G$, so dass

$$\forall a \in G: a \cdot e = a, e \cdot a = a$$

(iii) Für jedes $a \in G$ gibt es ein Element $a^{-1} \in G$ mit $a \cdot a^{-1} = e, a^{-1} \cdot a = e$.

(Schreibweise ist nur bei abelschen Gruppen gebräuchlich.)

zu beachten: Gruppen können in multiplikativer oder additiver Schreibweise vorliegen

(i) multiplikative Schreibweise:

Verknüpfungssymbol $\cdot$ (oder $*$, $\odot$ etc.)

Neutralelemente $e, e_G, 1, 1_G$

Inverse a^{-1}

Potenzen: $a^3 = a \cdot a \cdot a$

$$a^{-3} = (a^3)^{-1} = (a \cdot a \cdot a)^{-1} = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}$$

(ii) additive Schreibweise:

Verknüpfungssymbol $+$ (oder $\oplus$)

Neutralelement $0, 0_G$

Inverse: $-a$

Potenzen: $3a = a + a + a$

$$\begin{aligned} (-3) \cdot a &= -(3a) = -(a + a + a) \\ &= (-a) + (-a) + (-a) \end{aligned}$$

(Additive Schreibweise ist nur bei abelschen Gruppen gebräuchlich.)

Übersicht : wichtige abelsche Grp

(i) Gruppen als Bestandteile anderer Strukturen, etwa Ringe, Körper, Vektorräume, im Einzelnen :

$(R, +)$ falls R Ring

konkret : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Einheitengruppen von Ringen

konkret : $(R \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{F}_p \setminus \{0\}, \cdot)$

für eine Primzahl p

(ii)

Grp

konkret

Satz

Grp
endlich, zyklisch
der Form

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{a+n\mathbb{Z} \mid \text{ggT}(a,n)=1\}$$

$$= \{a+n\mathbb{Z} \mid 0 \leq a \leq n-1, \text{ggT}(a,n)=1\}$$

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{1, 3, 5, 7\}$$

(Erinnerung: Die primitive Restklassen-
gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ besteht aus $\varphi(n)$ Ele-
menten. Die Eulersche φ -Funktion
wird berechnet mit Hilfe der Regeln

$$\varphi(p^e) = p^{e-1}(p-1) \text{ falls } e \in \mathbb{N}, p \text{ prim}$$

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \text{ f\"ur alle } m, n \in \mathbb{N}$$

mit $\text{ggT}(m,n)=1$.)

weitere Klasse von Bsp.:

$(V, +)$ falls V K -Vektorraum, K Körper
konkret: $(\mathbb{R}^3, +)$ $(M_{3, \mathbb{Q}}, +)$

iii) Jedes direkte Produkt abelscher Gruppen ist eine abelsche Gruppe.

konkret: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$

Satz: Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist als direktes Produkt von endl. vielen zyklischen Gruppen (d.h. Gruppen der Form $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ darstellbar)

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

gen

$(\mathbb{F}_p \setminus \{0\}, \cdot)$

$\varphi = 17$
 $\varphi = 17$
... -
n) Ebe-
ktion
der Regeln
 $e \in \mathbb{N}, p$ prim
alle $m, n \in \mathbb{N}$

($\Rightarrow$ Jede endliche Gruppe ist direktes Produkt von endlich vielen endl. zyklischen Gruppen darstellbar. Dabei können die zykl. Gruppen so gewählt werden dass sie von Primzahlpotenzordnung sind.)

Bsp: Jede Gruppe der Ordnung 18 ist isomorph zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$

(iii) Jede Gruppe von Primzahl- oder Primzahlquadratordnung ist abelsch.

Korrektur 1. Zeile: Jede endliche **abelsche** Gruppe ist direktes...

(iv) S_n ist abelsch für $n \leq 2$

A_n ist abelsch für $n \leq 3$

Die Kleinsche Viergruppe V_4 ist abelsch.

Wichtige nicht-abelsche Gruppen

(i) S_n für $n \geq 3$

A_n für $n \geq 4$

D_n (Diedergruppen) für $n \geq 3$ ($|D_n| = 2n$)

(ii) Sind N, U Gruppen und $\varphi: U \rightarrow \text{Aut}(N)$

ein nichttrivialer Homomorphismus (d.h.

$\varphi(u) \neq \text{id}_N$ für mind. ein $u \in U$), dann ist

$\rightarrow \in H$

das Semidirekte Produkt $N \rtimes_{\varphi} U$
eine nicht-abelsche Gruppe.

(iii) $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ sind nicht abelsch
für $n \geq 2$ und einem beliebigen Körper K

$SO(n)$ ist nicht-abelsch für $n \geq 3$

$O(n)$ ist nicht abelsch für $n \geq 2$

(Erinnerung: orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in M_{n,\mathbb{R}} \mid {}^t A A = E_n\}$)

spezielle orth. Gruppe $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,\mathbb{R}} \mid \det(A) = 1\}$

M24T1A1

Sei $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Seien $A, B, C \in H$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $A \cdot B = C$ eine eindeutig bestimmte Lösung in H besitzt.

(c) Bestimmen Sie eine Lsg. von $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

zu (a) zu überprüfen (0) $H \subseteq GL_2(\mathbb{R})$

(1) $E_2 \in H$ (da E_2 das Neutralelt. von $GL_2(\mathbb{R})$ ist)

(2) $\forall A, B \in H: AB \in H$

(3) $\forall A \in H: A^{-1} \in H$

zu (0) Sei $A \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,

$a^2 + b^2 \neq 0$. Es gilt $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$

$\Rightarrow A$ ist invertierbar, d.h. $A \in GL_2(\mathbb{R})$

zu (1) klar: $E_2 \in M_{2,\mathbb{R}}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 E_2 erfüllt die def. Bedingung von $H \Rightarrow E_2 \in H$
(mit den Werten $a=1, b=0$)

zu (2), (3) Seien $A, B \in H$, z.zg.:
 $AB \in H$ und $A^{-1} \in H$

$$A \in H \rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 \neq 0 \\ \text{und } A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$B \in H \rightarrow \exists c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } c^2 + d^2 \neq 0 \\ \text{und } B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & ac - bd \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \text{ mit } u = ac - bd, v = ad + bc.$$

$$\text{au\ss} \text{erdem: } u^2 + v^2 = \det \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \det(AB) \\ = \det(A) \cdot \det(B) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \neq 0 \\ (\text{wg. } a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0) \Rightarrow AB \in H$$

$$(\text{Erinnerung: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ -v_1 & u_1 \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$u_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, v_1 = -\frac{b}{a^2 + b^2} \quad \text{und}$$

$$u_1^2 + v_1^2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} (a^2 + (-b)^2) = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\neq 0 \quad (\text{wg. } a^2 + b^2 \neq 0) \Rightarrow A^{-1} \in H.$$