

Das Riemann-Integral als Stammfunktion

Proposition (9.14)

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in]a, b[$. Die Funktion $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_c^x f(t) \, dt.$$

Dann ist F eine **Stammfunktion** von f .

Satz (9.16)

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f .
Für alle $c, d \in]a, b[$ gilt dann

$$\int_c^d f(x) \, dx = F(d) - F(c).$$

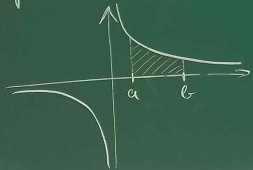
Fragestunde: Fr 14.2. 10¹⁵ - 11⁴⁵

Problem bei der Integration über eine
Definitionslücke

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\text{Stammfunktion } F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln|x|$$

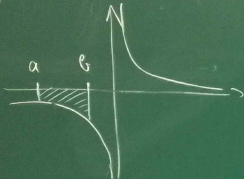
Integration über ein Intervall um Positives



$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a)$$

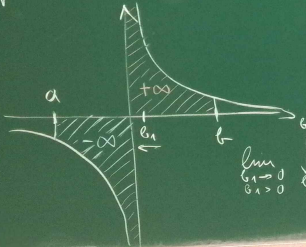
$\frac{1}{x} \cdot dx$

Integration über ein Intervall im Negativen



$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x} &= \ln(-b) - \ln(-a) \\ &= \ln|b| - \ln|a| < 0 \end{aligned}$$

Integration über die Definitionslücke hinweg



Integral nicht definiert

(insb nicht $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(-a)$)

Spund: $(-\infty) + (+\infty)$ kein sinnvoller

Ausdruck

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{b_1 \rightarrow 0 \\ b_1 > 0}} \int_{b_1}^b \frac{dx}{x} &= \lim_{b_1 \rightarrow 0} (\ln(b) - \ln(b_1)) = \lim_{b_1 \rightarrow 0} \ln(b) - \lim_{b_1 \rightarrow 0} \ln(b_1) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Satz (9.17)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $u(J) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx$$

für alle $a, b \in J$.

Beweis der Substitutionsregel:

Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfkt., setze $G = F \circ u$ (Definitionsbereich von G ist J) Kettenregel $\rightarrow$

$$G'(t) = (F \circ u)'(t) = F'(u(t)) u'(t) = f(u(t)) u'(t)$$

für alle $t \in J$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = [G(t)]_a^b = [(F \circ u)(t)]_a^b$$

$\uparrow$ G ist Stammfkt. von G'

$$= (F \circ u)(b) - (F \circ u)(a) = F(u(b)) - F(u(a)) = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)}$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

$\uparrow$ F ist Stammfkt. von f

□

Anwendungsbeispiele:

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $-c \notin [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{dt}{t+c} = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{dx}{x} = \int_{a+c}^{b+c} \frac{dx}{x} =$$

$\uparrow$ Substitutionsregel
 angewendet auf $u(t) = t+c$

$$\left[\ln |x| \right]_{a+c}^{b+c} \quad u'(t) = 1 \text{ und } f(x) = \frac{1}{x}$$

$\uparrow$ „Re substitution“
 $\Rightarrow$ erhalte für das unbestimmte Integral $\int \frac{dt}{t+c} = \ln |t+c|$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_a^b t e^{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_a^b \overset{\substack{\text{exp}(u(t)) \\ u'(t)}}{e^{t^2} \cdot (2t)} dt = \frac{1}{2} \int_{u(a)}^{u(b)} e^x dx = \frac{1}{2} \left[e^x \right]_{u(a)}^{u(b)} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x \right]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2} \left[e^{t^2} \right]_a^b = \left[\frac{1}{2} e^{t^2} \right]_a^b \end{aligned}$$

Satz (9.18)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

für alle $a, b \in I$.

Beweis von Satz 9.18 (partielle Integration)

geg. $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$
stetig diff'bar Produktregel $\rightarrow$

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \quad \forall t \in I$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert für alle $a, b \in I$

$$[(fg)(t)]_a^b = \int_a^b (fg)'(t) dt =$$

$$\int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt =$$

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b \underset{\downarrow}{f(t)} \underset{\uparrow}{g'(t)} dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt \quad \square$$

Anwendungen der partiellen Integration

$$(1) \int_a^b \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x} dx = [x \cdot e^x]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx =$$
$$[x \cdot e^x]_a^b - [e^x]_a^b = [(x-1)e^x]_a^b$$

$$(2) \int_a^b (x^2+5) \cdot e^x dx = [(x^2+5)e^x]_a^b - \int_a^b 2x \cdot e^x dx$$
$$= [(x^2+5)e^x]_a^b - 2 \int_a^b x \cdot e^x dx \stackrel{\text{siehe (1)}}{=} [(x^2+5)e^x]_a^b$$
$$- 2[(x-1)e^x]_a^b = [(x^2-2x+7)e^x]_a^b$$

Weitere Beispiele zur Substitutionsregel und zur
partiellen Integration

$$\begin{aligned}(1) \text{ Seien } a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \int_a^b \ln(x) dx &= \int_a^b \overset{1}{\uparrow} \cdot \ln(x) \overset{x}{\downarrow} dx \\&= [x \ln(x)]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \ln(x)]_a^b - \int_a^b 1 dx \\&= [x \ln(x)]_a^b - [x]_a^b = [x (\ln(x) - 1)]_a^b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ Seien } a, b \in [-1, 1] \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\substack{\text{Substitutionsregel} \\ \text{angewandt auf } u(t) = \sin(t)}}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \frac{u'(t) dt}{\sqrt{1-u(t)^2}} \\&= \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)^2}} dt \stackrel{(*)}{=} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \frac{\cos(t)}{\cos(t)} dt\end{aligned}$$

$$= \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} 1 \, dt = [t]_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} = [t]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} = [\arcsin(x)]_a^b$$

(*) Die Umkehrfkt. von $u = \sin|_{[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]}$ ist der Arkussinus, mit Wertebereich $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. $\Rightarrow \cos(t) \geq 0$ für alle t zwischen $u^{-1}(a)$ und $u^{-1}(b) \rightarrow \sqrt{1 - \sin(t)^2} = \sqrt{\cos(t)^2} = |\cos(t)| = \cos(t)$ für diese t

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 1$

Erinnerung Übungsblatt: $\sinh(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \quad \Rightarrow \text{gilt } \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \text{ außerdem } \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\operatorname{arcosh}(a)}^{\operatorname{arcosh}(b)} \frac{\cosh'(t)}{\sqrt{\cosh(t)^2 - 1}} dt = \int_{\operatorname{arcosh}(a)}^{\operatorname{arcosh}(b)} \frac{\sinh(t)}{\sinh(t)} dt =$$

$$\int_{\operatorname{arcosh}(a)}^{\operatorname{arcosh}(b)} 1 \cdot dt = \dots = \left[\operatorname{arcosh}(x) \right]_a^b$$

(4) Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $I_n = \int_a^b \sin(x)^n dx$
 bekannt: $I_1 = [-\cos(x)]_a^b$ Sei nun $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_a^b \sin(x)^n dx = \int_a^b \sin(x) \cdot \sin(x)^{n-1} dx = \\
 &\quad \left[(-\cos(x)) \cdot \sin(x)^{n-1} \right]_a^b - \int_a^b (-\cos(x)) (n-1) \sin(x)^{n-2} \cdot \cos(x) dx = \\
 &\quad \left[(-\cos(x)) \cdot \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + (n-1) \int_a^b \cos(x)^2 \sin(x)^{n-2} dx = \\
 &\quad \left[(-\cos(x)) \cdot \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + (n-1) \int_a^b (1 - \sin(x)^2) \cdot \sin(x)^{n-2} dx = \\
 &\quad \left[(-\cos(x)) \cdot \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + (n-1) \int_a^b \sin(x)^{n-2} dx - (n-1) \int_a^b \sin(x)^n dx \\
 &= \left[(-\cos(x)) \cdot \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\
 \Rightarrow n \cdot I_n &= \left[(-\cos(x)) \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + (n-1) I_{n-2}
 \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{1}{n} \left[-\cos(x) \sin(x)^{n-1} \right]_a^b + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ for } n \geq 2$$

$$I_0 = [x]_a^b, \quad I_1 = [-\cos(x)]_a^b$$

$$I_2 = \left[-\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x \right]_a^b$$

Uneigentliche Riemann-Integrale, Teil I

Definition (9.19)

Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$. Sei $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass f über jedes Teilintervall der Form $[c, b]$ mit $a < c < b$ integrierbar ist. Dann nennt man den Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx, \quad \text{sofern er existiert,}$$

das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über das halboffene Intervall $]a, b]$.

Definition (9.20)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, mit $a < b$. Sei $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass f über jedes Teilintervall der Form $[a, c]$ mit $a < c < b$ integrierbar ist. Dann nennt man den Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx \quad \text{im Falle der Existenz}$$

das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über das halboffene Intervall $[a, b[$.

Uneigentliche Riemann-Integrale, Teil III

Definition (9.21)

Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, mit $a < b$. Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass f über jedes Teilintervall der Form $[c, d]$ mit $a < c < d < b$ integrierbar ist. Sei nun $m \in]a, b[$ beliebig gewählt. Dann bezeichnet man die Summe der Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^m f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b} \int_m^d f(x) dx, \quad ,$$

sofern sie **beide** existieren, als das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über das offene Intervall $]a, b[$.

Beispiel für ein uneigentliches
Riemann-Integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \right) dt + \lim_{x \rightarrow 1} \int_{\frac{1}{2}}^x \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \right) dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2\sqrt{t} - 2\sqrt{1-t} \right]_x^{\frac{1}{2}} + \lim_{x \rightarrow 1} \left[2\sqrt{t} - 2\sqrt{1-t} \right]_{\frac{1}{2}}^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}} - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} \right)$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1} \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} - \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}} \right)$$

$\sin(t)$

$$= -2\sqrt{0} + 2\sqrt{1-0} + 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}$$

$$= 4$$

I

I

I_2

Der Satz von der Partialbruchzerlegung

Erinnerung:

Eine rationale Funktion ist eine Funktion f der Form

$f(x) = g(x)/h(x)$, wobei g und h Polynomfunktionen bezeichnen und h ungleich null ist.

Satz (9.22)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine rationale Funktion wie oben beschrieben. Es seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ die verschiedenen reellen Nullstellen von h und $r_i \in \mathbb{N}$ jeweils die Vielfachheit der Nullstelle x_i . Weiter seien $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n$ die verschiedenen Paare nicht-reeller, konjugiert-komplexer Nullstellen, $p_i = 2\operatorname{Re}(z_i)$, $q_i = z_i \bar{z}_i = |z_i|^2$ und $s_i \in \mathbb{N}$ die gemeinsame Vielfachheit der Nullstellen $z_i, \bar{z}_i$. Dann gibt es Koeffizienten $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r_i$ und $c_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq s_i$ und eine Polynomfunktion q , so dass f in der folgenden Form darstellbar ist:

$$f(x) = q(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$