

Die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen

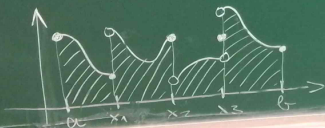
Satz (9.10)

Jede auf einem **endlichen, abgeschlossenen** Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktion ist dort auch gleichmäßig stetig.

Satz (9.11)

Jede stetige Funktion auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall ist Riemann-integrierbar.

Ergänzung. Man bezeichnet eine Fkt. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als stückweise stetig, wenn eine Zerlegung $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ für $0 \leq k \leq n-1$ stetig ist und die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_{k+1}^-} (f|_{[x_k, x_{k+1}]})(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_k^+} (f|_{[x_k, x_{k+1}]})(x)$ jeweils existieren (rechtssseitiger Grenzw.) (linkssseitiger Grenzw.) für $0 \leq k \leq n-1$.



Jede stückweise stetige Fkt. auf $[a, b]$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Zum Beweis:

- Es reicht zu zeigen, dass f jeweils über $[x_k, x_{k+1}]$ Riemann-integrierbar ist, für $0 \leq k \leq n-1$.
- Man kann zeigen, dass sich an der Riemann-Integrierbarkeit einer Fkt. auf einem Intervall $[a, b]$ nichts ändert, wenn man die Fkt. an endlich vielen Punkten ändert. (Auch der Wert des Integrals bleibt gleich.)
- Also die Fkt. $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ dadurch ab, dass man $f(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} (f|_{[x_k, x_{k+1}]})(x)$ und $f(x_{k+1}) = \lim_{x \rightarrow x_{k+1}} (f|_{[x_k, x_{k+1}]})(x)$

setzt. Die geänderte Fkt. ist dann
 $[x_k, x_{k+1}]$ stetig, und somit Riemann-
integrierbar. Auf Grund des vorherigen
Satzes ist auch die ursprüngliche Fkt.
 $f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ Riemann-integrierbar.

Satz (9.12)

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei wir $g \geq 0$ voraussetzen. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx.$$

Der Spezialfall $g = 1$ liefert die Gleichung

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a)$$

für ein $c \in [a, b]$.

Die Gleichung des Mittelwertsatzes ist auch im Fall $a \geq b$ gültig.

Beweis von Satz 9.12

geg. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei
 $g \geq 0$ ist z.zg. Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

Maximumsprinzip (Satz 5.17) $\rightarrow$ Es gibt
Punkte $p, q \in [a, b]$, in den f ihr Minimum
bzw. ihr Maximum annimmt, o.B.d.A. $p < q$.
 $\rightarrow f(p) g(x) \leq f(x) g(x) \leq f(q) g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Integration
 $\Rightarrow f(p) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq f(q) \int_a^b g(x) dx$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x) g(x) dx = m \int_a^b g(x) dx$,
wobei $f(p) \leq m \leq f(q)$ gilt

f ist stetig, Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists c \in [p, q]$

mit $f(c) = m \Rightarrow \int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$.

□

Definition (9.13)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird **Stammfunktion** von f genannt, wenn F auf ganz D differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

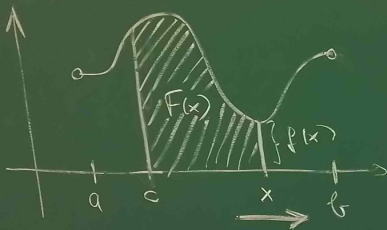
Proposition (9.14)

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in]a, b[$. Die Funktion $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_c^x f(t) \, dt.$$

Dann ist F eine **Stammfunktion** von f .

"Veranschaulichung" der Aussage von
Proposition 9.14



Je größer der Wert $p(x)$,
desto größer ist das
Momentum der Fläche
um "Momentum" x .

1. $p < q$.
 $x \in [a, b]$
 $g(x) dx$

Beweis von Proposition 9.14:

geg. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c \in [a, b]$

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_c^x f(t) dt$

Sei $x_0 \in [a, b]$ z.zg. $F'(x_0) = f(x_0)$ gleichbedeutend

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in

$[a, b] \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ z.zg. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = f(x_0)$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{1}{x_n - x_0} \left(\int_c^{x_n} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \right)$

$= \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt$ Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{1}{x_n - x_0} \left(\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt \right)$

liefert jeweils ein y_n zwischen x_0 und x_n (genauer: im Intervall $[x_0, x_n]$, falls $x_0 < x_n$ bzw. in $[x_n, x_0]$, falls $x_n < x_0$) mit

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = f(y_n) \cdot (x_n - x_0). \text{ Aus } y_n \in [x_0, x_n] \text{ bzw. } y_n \in [x_n, x_0]$$

folgt $|y_n - x_0| \leq |x_n - x_0| \Rightarrow$ Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt auch

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \cdot f(y_n) (x_n - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

$$= f(x_0)$$

$\uparrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$
 f stetig in x_0



Proposition (9.15)

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Eine weitere Funktion G auf $]a, b[$ ist genau dann eine Stammfunktion von f , wenn die Differenz $G - F$ auf $]a, b[$ **konstant** ist.

Beweis von Prop. 9.15:

geg. $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $F:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ Stammfkt. von f

Sei $G:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. z.zg:

G ist Stammfkt. $\iff \exists c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = F(x) + c$
für alle $x \in]a, b[$

" $\Leftarrow$ " Aus der Vor. folgt $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$
für alle $x \in]a, b[$. Also ist G eine Stammfkt. von f .

" $\Rightarrow$ " Da F und G beides Stammfkt. von f sind, gilt
 $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Für alle $x \in]a, b[$. Nach Folgerung 8.5 folgt daraus,
dass $G - F$ auf $]a, b[$ konstant ist, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) - F(x)$
 $= c \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in]a, b[. \quad \square$

Satz (9.16)

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f .
Für alle $c, d \in]a, b[$ gilt dann

$$\int_c^d f(x) \, dx = F(d) - F(c).$$

Beweis von Satz 9.16 :

geg. $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, stetig

Seien $c, d \in]a, b[$, und sei F eine
Stammfkt. von f . Beh.:

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

1. Fall. $c < d$ Prop. 9.14 $\Rightarrow$ Durch

$\tilde{F}(x) = \int_c^x f(t) dt$ ist eine Stammfkt. von

f gegeben. F ist weitere Stammfkt.

Prop. 9.15 $\exists m \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = \tilde{F}(x) + m \quad \forall x \in]a, b[$

$$\Rightarrow \int_c^d f(x) dx = \tilde{F}(d) = F(d) - m$$

$$\text{ebenso: } F(d) - F(c) = \tilde{F}(d) + m - (\tilde{F}(c) + m)$$

$$= \tilde{F}(d) - \tilde{F}(c) = \hat{F}(d) - \int_c^c f(t) dt =$$

$$\hat{F}(d) - 0 = \hat{F}(d) \Rightarrow \int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

$$2. \text{ Fall: } c = d \quad \int_c^d f(x) dx = 0 = F(d) - F(c)$$

$$3. \text{ Fall: } c > d \quad \int_c^d f(x) dx = - \int_d^c f(x) dx \stackrel{1. \text{ Fall}}{=} \square$$

$$- (F(c) - F(d)) = F(d) - F(c)$$

Notation • Der Ausdruck $[F(x)]_c^d$ ist
eine Kurzschreibweise für $F(d) - F(c)$.

• Der Ausdruck $\int f(x) dx$ ("unbestimmtes Integral")
bezeichnet eine beliebig gewählte Stammfunktion
von f .

• Die Gleichung $\int f(x) dx = F(x)$ bedeutet
ausgeschrieben $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ für alle a, b
im gemeinsamen Definitionsbereich von f und F .

von

$x \in]a, b[$

Anwendungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

(i) $\int x^n dx \stackrel{(*)}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

wobei $x \neq 0$ falls $n < 0$ (Bedeutet: Im Fall $n < 0$ auf 0 nicht in dem Intervall $[a, b]$ liegen, auf das man die Gleichung anwendet.)

Der Beweis von $(*)$ folgt aus der Tatsache, dass $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ die Stammfkt. von $f(x) = x^n$ ist, wobei der Def.-bereich im Fall $n \geq 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist, im Fall $n \leq -2$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zusammen mit dem Hauptsatz.

Das Integral $\int x^{-2} dx$ existiert nicht (als Riemann-Integral)
insbesondere gilt nicht $\int_{-3}^2 x^{-2} dx = (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} !$

lii) $\int e^x dx = e^x$ (Grund: Die Exponentialfkt.
ist auf ganz $\mathbb{R}$ ihre eigene Stammfkt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist somit auf jedes offene Teilintervall $I_a, b \subseteq \mathbb{R}$ anwendbar.)

liii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ für $x \neq 0$

(Die Bed $x \neq 0$ bedeutet, dass z.B. $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$ nicht
definiert ist. Insb. gilt nicht $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) - \ln(1)$.)

Begründung: Auf $D = \mathbb{R}^+$ ist $\ln(x) = \ln|x|$ eine Stammfkt.
von $x \mapsto \frac{1}{x}$ (wurde aus der Umkehrregel gefolgt.)

$$\text{Hauptsatz} \Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

Auf $D = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ ist $F(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ eine
Stammfkt. von $f(x) = \frac{1}{x}$. Setzen wir $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x$,
dann liefert die Kettenregel nämlich $F'(x) = (\ln \circ u)'(x) =$
 $\ln'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ Hauptsatz $\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^b$
für alle $a, b < 0$ $\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x} dx = \ln(4) - \ln(5)$