Die l'Hospital'schen Regeln

Satz (8.8)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ein Berührpunkt von I. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit den Eigenschaften $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und entweder

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to a} g(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dies soll bedeuten: Existiert der Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ auf der rechten Seite der Gleichung, dann existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite und hat denselben Wert c.

Definition der Taylorpolynome

Definition (8.10)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in D$, dann nennt man

$$\tau_1(f, a) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x - a)$$

das Taylorpolynom erster Ordnung von f an der Stelle a.

Definition (8.11)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $a \in D$, dann nennt man

$$\tau_2(f, a) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle a.

Setzen wir $p_k = \tau_k(f, a)$ für $k = 1, 2$, dann gilt $p_1(a) = f(a)$ und $p_1'(a) = f'(a)$. Das zweite Taylorpolynom erfüllt diese Bedingungen ebenfalls, und darüber hinaus auch $p_2''(a) = f''(a)$.

Existenz beidseitiger Grenzwerte

Lemma (8.12)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ und $f :]a, b[\setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wenn die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x)$$

existieren und übereinstimmen, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to c} f(x)$, und es gilt $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (f|_{]a,c[})(x) = \lim_{x \to c} (f|_{]c,b[})(x)$.

Hinweis:

Aus dem Lemma folgt, dass die l'Hospitalschen Regeln auch auch beidseitige Grenzwerte angewendet werden können.

Interpretation der zweiten Ableitung einer Funktion

Anmerkung:

Nach Proposition 7.2 ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt a von D genau dann differenzierbar, wenn eine Funktion $\psi : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = \tau_1(f, a)(x) + \psi(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{x - a} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Satz (8.13)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt, in dem f zweimal differenzierbar ist. Dann gibt es eine Funktion $\psi : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \tau_2(f, a)(x) + \psi(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{(x - a)^2} = 0.$$

Beweis von Satz 8.13

geg.: Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, zweimal diff'bar in $a \in D$

Wir definieren $\psi: D \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(x) = f(x) - \tau_2(f,a)(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

für alle $x \in D$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \psi(x) \underset{f \text{ stetig in } a}{=} f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) - \tfrac{1}{2} f''(a)(a-a)^2$$

$= 0$, ebenso $\lim_{x \to a} (x-a)^2 = 0 \Rightarrow$ beidseitiger l'Hospital anwendbar $\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{\psi'(x)}{2(x-a)}$

falls der Grenzwert rechts existiert

Weil f' in a diff'bar ist, ist f' auch in einer ε-Umg von a definiert. Für die x in dieser Umg. gilt

$\psi'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)$. Da f' in a diff'bar ist, ist f' auch in a stetig. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)$

$$\psi'(a) = f'(a) - f'(a) - f''(a)(a-a) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\psi'(x)}{2(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\psi'(x)-\psi'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}\psi''(a)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f''(a) - T_2(f,a)''(a)\right) = 0 \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to a} \frac{\psi(x)}{(x-a)^2} = 0$$

$\square$

Hinreichende Kriterium für lokale Extrema

Satz (8.14)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in D$ ein Punkt, in dem f sogar zweimal differenzierbar ist. Gilt nun

$$f'(c) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(c) < 0 \quad ,$$

dann besitzt f in c ein lokales Maximum.

Satz (8.15)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in D$ ein Punkt, in dem f sogar zweimal differenzierbar ist. Gilt nun

$$f'(c) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(c) > 0 \quad ,$$

dann besitzt f in c ein lokales Minimum.

Das angebene Kriterium ist aber jeweils kein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Extremums.

Beweis von Satz 8.14:

geg.: $f: D \to \mathbb{R}$, zweimal diff'bar in $a \in D$, es gelte $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$

z.zg.: f hat in a ein lokales Maximum

Nach Satz 8.13 existiert eine Fkt. $\varphi: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \varphi(x) \underset{f'(a)=0}{=}$

$f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \varphi(x) \quad \forall x \in D$

und $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^2} = 0$. (*)

Für alle $x \in D \setminus \{a\}$ gilt die Äquivalenz

$$f(a) \geq f(x) \iff \cancel{f(a)} \geq \cancel{f(a)} + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \varphi(x) \iff \left(-\tfrac{1}{2}\right) f''(a)(x-a)^2 \geq \varphi(x)$$

Setze $\varepsilon = -\frac{1}{2} f''(a)$. Wegen $(*)$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\left|\frac{\varphi(x)}{(x-a)^2}\right| < \varepsilon$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x-a| < \delta$. Für diese x gilt dann

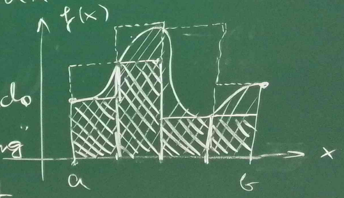
$$\varphi(x) \leq |\varphi(x)| = \left|\frac{\varphi(x)}{(x-a)^2}\right| \cdot (x-a)^2 \leq \varepsilon \cdot (x-a)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right) f''(a)(x-a)^2$$

und somit auch $f(a) \geq f(x)$. Also ist a ein lokales Maximum von f. $\square$

Integration

geg eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$

intuitiv: $\int_a^b f(x)\,dx$ = „Fläche unter dem Funktionsgraphen"



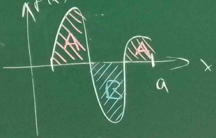
Idee: verwende die Fläche als „untere Näherung" für den Flächeninhalt

Nimmt man hinzu, dann erhält man eine obere für den Flächeninhalt

Nimmt man [illegible] hinzu, dann erhält man eine obere Abschätzung.

Beobachtung: Wählt man eine feinere Unterteilung des Intervalls $[a,b]$, dann wird [illegible] im Allgem. größer und die Fläche zzgl. [illegible] im Allgemeinen kleiner $\rightarrow$ erhalten eine genauere Abschätzung des Flächeninhalts von unten und oben.

Bei Funktionen die sowohl positive als auch negative Werte annehmen, ist $\int_a^b f(x)\,dx$ die Differenz zweier Flächeninhalte



$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B$$

Im gesamten Abschnitt bezeichnet $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall positiver Länge, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Definition

- Eine Zerlegung von [a,b] ist eine endliche (eventuell auch leere) Teilmenge $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\} \subseteq]a, b[$.
- Mit $Z(a, b)$ bezeichnen wir die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

Die Elemente eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ werden immer so durchnummeriert, dass $x_k < x_{k+1}$ für $1 \leq k < n - 1$ erfüllt ist. Außerdem setzen wir stets $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Definition der Unter- und Obersummen

Definition (9.1)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.
Für jedes k mit $0 \le k < n$ definieren wir

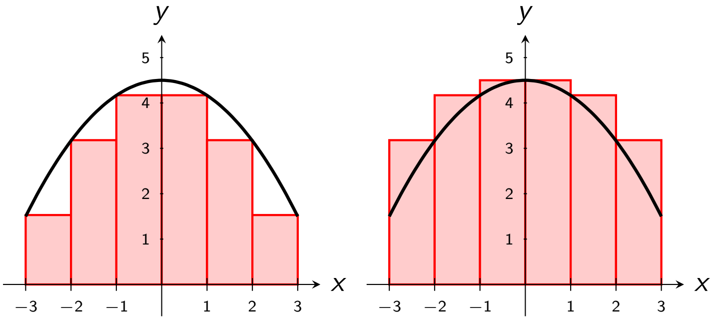
$$c_k = \inf f([x_k, x_{k+1}]) \text{ und } d_k = \sup f([x_k, x_{k+1}]).$$

Dann bezeichnet man

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \text{ bzw. } \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(x_{k+1} - x_k)$$

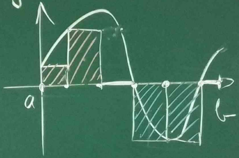
als Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Veranschaulichung der Unter- und Obersummen



Ober- und Untersumme bei einer Funktion mit positiven und negativen Werten

Untersumme

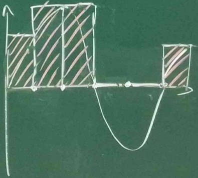


positive Summanden in der Untersumme

negative Summanden

Summanden mit Wert 0

Obersumme



positive Summanden in der Obersumme

Summanden mit Wert 0

Definition Riemann-integrierbarer Funktionen

Definition (9.2)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_{a\bigstar}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad \sup\left\{\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{a}^{b\bigstar} f(x)\,dx \quad = \quad \inf\left\{\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) \;\middle|\; \mathscr{Z} \in \mathrm{Z}(a,b)\right\}$$

als Unter- bzw. Oberintegral der Funktion f. Stimmen Unter- und Oberintegral von f überein, dann bezeichnet man f als Riemann-integrierbar und nennt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_{a\bigstar}^{b} f(x)\,dx \quad = \quad \int_{a}^{b\bigstar} f(x)\,dx$$

das Riemann-Integral der Funktion f.

(Unter- und Oberintegral haben stets endliche Werte.)

Beispiel: Berechnung eines Unter- und eines Oberintegrals

$f: [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ (mit der Schulmethode:

$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$)

Berechnung geeigneter Unter- und Obersummen:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte die äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ geg. durch $Z_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$

Dies liefert die Teilintervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ für $1 \leq k \leq n$.

Der minimale Funktionswert auf $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist jeweils $f(\frac{k-1}{n}) = (\frac{k-1}{n})^2$, der maximale $f(\frac{k}{n}) = (\frac{k}{n})^2$.

$\lim_{n\to\infty} S_f^+(Z_n) = \frac{1}{3}$ folgt mit dem

Verwende die Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Untersummen: $S_f^-(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} (n-1)\,n\,(2n-1) =$$

$$\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_f^-(Z_n) = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Obersummen: $S_f^+(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_f^+(Z_n) = \frac{1}{3}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

nächste Vl.

$$S_f^-(Z_n) \leq \int_{0*}^{1} f(x)\,dx \leq \int_0^{1*} f(x)\,dx$$

$\leq S_f^+(Z_n)$ Wegen $\lim_{n\to\infty} S_f^-(Z_n) = \lim_{n\to\infty} S_f^+(Z_n) = \frac{1}{3}$ folgt mit dem Sandwich-Lemma $\int_{0*}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$

und $\int_0^{1*} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Also ist f
Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$$