

Definition (7.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein innerer Punkt. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird **differenzierbar** an der Stelle a genannt, wenn

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

als Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Man nennt $f'(a)$ in diesem Fall die **Ableitung** von f an der Stelle a . Wir nennen die Funktion f **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Satz (7.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch $f + g$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Satz (7.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch fg in a differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Folgerung (7.6)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'_n(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist die Funktion f_n auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

Satz (7.7)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Sei $a \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f und g in a differenzierbar sind. Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Satz (7.8)

Seien D und E Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei $a \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a differenzierbar ist und dass g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Satz (7.9)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Sei $J = f(I)$ und $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f . Ist f an einer Stelle $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, dann ist auch g an der Stelle $b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Beweis von Satz 7.9 (Umkehrregel)

Vor: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng mon. wachsend. $J = f(I)$, $g: J \rightarrow I$ Umkehrfkt.

$a \in I$ mit f in a diff'bar, $f'(a) \neq 0$, $b = f(a)$

z.zg: g ist in b diff'bar, und $g'(b) = f'(a)^{-1}$

somit z.zg: $\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = f'(a)^{-1}$

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $J \setminus \{b\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

z.zg: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = f'(a)^{-1}$

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $J \setminus \{b\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Definiere eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I durch $x_n = g(y_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ (gleichbed.: $y_n = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$)

$y_n \neq b \forall n \in \mathbb{N}$, g injektiv $\Rightarrow x_n = g(y_n) \neq g(b) = a \forall n \in \mathbb{N}$

Da g stetig ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b) = a$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1} \quad \text{Grenzwertsatz}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1}$$

$$= f'(a)^{-1}$$



Folgerung (7.10)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $g_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Dann ist g_k auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar, und es gilt $g'_k(x) = \frac{1}{k}(\sqrt[k]{x})^{1-k}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Folgerung (7.11)

Die Ableitung der Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Anwendungsbeispiele für die Umkehrregel

(1) Sei $k \geq 2$ und $g_k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$
die k -te Wurzelfunktion. Dann gilt
$$g_k'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Daraus folgt, dass die Ableitung von
 $P_r: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^r$ für jedes
 $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ durch $g_r'(x) = r \cdot x^{r-1}$
gegeben ist

(2) Ableitung des Logarithmus: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

zu (1) bekannt: g_k ist die Umkehrfkt. von
 $f_k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k$. $f'_k(x) = k \cdot x^{k-1}$ für
 alle $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow$ erhalte mit der Umkehrregel

$$g'_k(x) = \frac{1}{f'_k(g_k(x))} = \frac{1}{k \cdot (g_k(x))^{k-1}} =$$

$$\frac{1}{k} \cdot g_k(x)^{1-k} = \frac{1}{k} (x^{1/k})^{1-k} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}$$

Sei nun $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $r = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und
 $b \in \mathbb{N}$. Nach Def gilt $p_r(x) = x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$

$$= (g_b \circ p_a)(x) \Rightarrow p'_r(x) = g'_b(p_a(x)) p'_a(x)$$

$$= \frac{1}{b} (x^a)^{\frac{1}{b}-1} \cdot a x^{a-1} = \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-a} x^{a-1} = \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b}-1}$$

$$= r \cdot x^{r-1}$$

zu (2) $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfkt. der
Exponentialfunktion, und $\exp' = \exp$

Umkehrregel $\Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} =$
 $\frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$

und
[a]

$P_a'(x)$
 x^{a-1}

§ 8. Mittelwertsatz und Extremwertbestimmung

Definition (8.1)

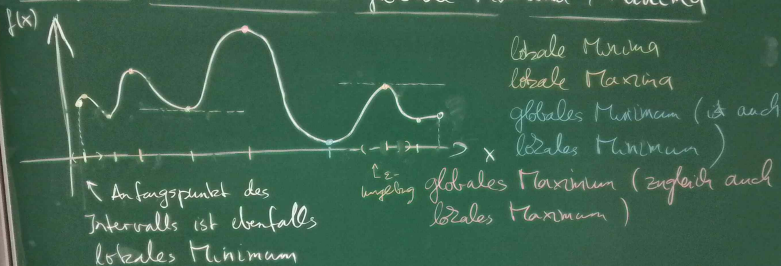
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein beliebiger Punkt. Man nennt a ein

- (i) **lokales Maximum** von f , wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon$ gilt, und ein
- (ii) **globales Maximum** von f , wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Entsprechend sind die Begriffe **lokales** bzw. **globales Minimum** definiert.

Das Wort **Extremum** ist der gemeinsame Oberbegriff für Minimum und Maximum.

Beispiele für lokale und globale Maxima / Minima



Proposition (8.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein lokales Extremum von f . Ist die Funktion f in a differenzierbar, dann gilt $f'(a) = 0$.

Beweis von Prop. 8.2

geg: $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Fkt., $a \in D$ lokales Extremum

Betrachte hier nur den Fall, dass a lokales Maximum ist.

Vor: f ist in a diff'bar, d.h. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ existiert

z.zg: $c = 0$ Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge $\stackrel{\text{in } D}{\text{mit}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n < a$
für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_n - a < 0$. lok. Maximum $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |x_n - a| < \varepsilon$, also $x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ und
somit $f(x_n) \leq f(a) \Rightarrow f(x_n) - f(a) \leq 0$ für diese n

$$\Rightarrow \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0 \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0$$

Sei nun $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad y_n > a \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists N' \in \mathbb{N}$$

mit $y_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\quad \forall n \geq N'$ Für diese

$n \in \mathbb{N}$ gilt dann $f(y_n) \leq f(a)$ und somit

$$\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \leq 0 \Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \leq 0$$

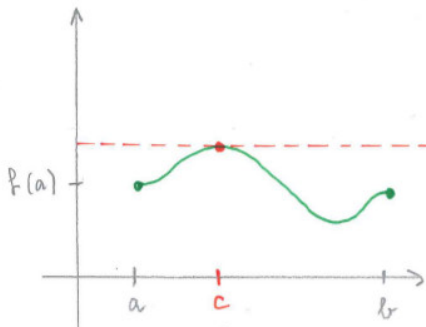
insgesamt: $c \geq 0$ und $c \leq 0 \Rightarrow c = 0$. $\square$

$$) = \frac{1}{x}$$

Satz von Rolle

Satz (8.3)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$, die darüber hinaus auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = 0$.



Beweis von Satz 8.3

geg. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion,
diff'bar auf $]a, b[$, $f(a) = f(b)$

Beh.: Die Ableitung von f hat in $]a, b[$ mindestens
eine Nullstelle.

1. Fall. $\exists p \in]a, b[$ mit $f(p) > f(a) = f(b)$

Dann nimmt f auf Grund des Maximumprinzips
auf $[a, b]$ ein Maximum in einem Punkt $q \in [a, b]$ an.

Wegen $f(q) \geq f(p) > f(a) = f(b) \rightarrow q \notin \{a, b\}$

$\Rightarrow q \in]a, b[\Rightarrow f$ ist in q diff'bar Satz 8.2 $f'(q) = 0$

auf $[a, b]$ ein Maximum in einem Punkt $q \in [a, b]$ an.

2. Fall: $\exists p \in]a, b[$ mit $f(p) < f(a) = f(b)$

Analog, wende das Maximumprinzip an, um für f ein globales Minimum nachzuweisen.

3. Fall: f ist auf $[a, b]$ konstant

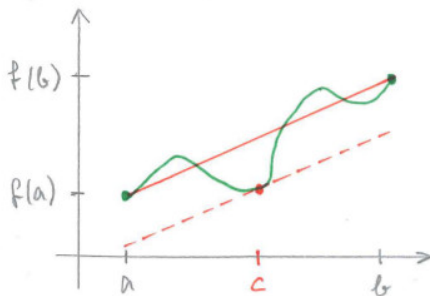
Dann ist f auch auf $]a, b[$ konstant, und folglich $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. □

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz (8.4)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis von Satz 8.4 (Mittelwertsatz)

geg: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig, auf $]a, b[$ diff'bar

z.zg: $\exists c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

klar: Mit f ist auch g diff'bar auf $]a, b[$

(weil $x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ als Polynom

diff'bar ist), ebenso stetig auf $[a, b]$.

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = f(a),$$

$$\begin{aligned} \text{ebenso } g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) \\ &= f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \end{aligned}$$

Satz von Rolle $\Rightarrow \exists c \in]a, b[$ mit

$$g'(c) = 0 \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{also: } g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ableitung und Monotonieverhalten

Folgerung (8.5)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f auf $[a, b]$ **konstant**.

Satz (8.6)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion.

- (i) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ **monoton wachsend**.
- (ii) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ **streng monoton wachsend**.
- (iii) Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ **monoton fallend**.
- (iv) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f auf $[a, b]$ **streng monoton fallend**.

Beweis von Folgerung 8.5

geg. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$)
auf $]a, b[$ diff'bar, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Beh. f ist konstant auf $[a, b]$

Ang. f ist nicht konstant. $\Rightarrow \exists x_0 \in]a, b[$

mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$.

Betrachte nur den ersten Fall. Dann ist

$$v := \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0 \quad \text{Mittelwertsatz,}$$

angewendet auf $f|_{[a, x_0]} \Rightarrow \exists c \in]a, x_0[$

mit $f'(c) = v \nmid$ zu $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$ $\square$

Beweis von Satz 8.6, nur (i), (ii)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $]a, b[$ diff'bar
(mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$)

zu (i) Ang. es gilt $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$, aber
 f ist auf $[a, b]$ nicht monoton wachsend.

$\Rightarrow \exists c, d \in [a, b], c < d$ mit $f(c) > f(d)$

Mittelwertsatz, angewendet auf $f|_{[c, d]} \Rightarrow$

$\exists x \in]c, d[$ mit $f'(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < 0 \quad \downarrow$ zu

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

zu (ii) Ang., es gilt $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$, aber
 f ist auf $[a, b]$ nicht streng monoton wachsend.

$$\Rightarrow \exists c, d \in [a, b] \text{ mit } c < d \text{ und } f(c) \geq f(d)$$

Mittelwertsatz, angewendet auf $f|_{[c, d]}$ $\Rightarrow$

$$\exists x \in]c, d[\text{ mit } f'(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq 0 \quad \nmid$$

zu $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$. □