Definition der Differenzierbarkeit

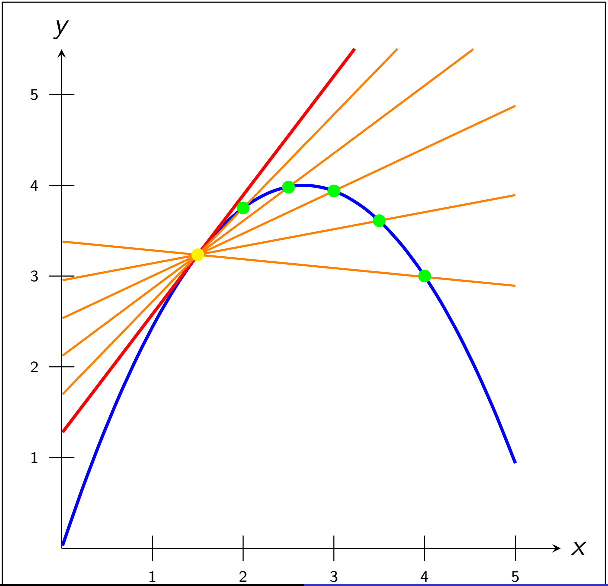
Definition (7.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein innerer Punkt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird differenzierbar an der Stelle a genannt, wenn

$$f'(a) \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

als Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Man nennt $f'(a)$ in diesem Fall die Ableitung von f an der Stelle a. Wir nennen die Funktion f differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Veranschaulichung der Differenzierbarkeit



Äquivalente Charakterisierungen der Differenzierbarkeit

Proposition (7.2)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein innerer Punkt. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist in a differenzierbar.

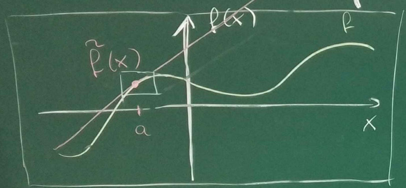
(ii) Es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(iii) Es gibt eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\psi : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a+h) = f(a) + ch + \psi(a+h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\psi(a+h)}{h} = 0.$$

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, dann stimmt der Grenzwert in (ii) und die reelle Zahl c in (iii) mit dem Wert $f'(a)$ der Ableitung überein.

zu Punkt (iii) von Prop. 7.2



$$\tilde{f}(x) = f(a) + c(\underbrace{x-a}_{h})$$

Beweis von Prop. 7.2:

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor.: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert

Sei c dieser Grenzwert ($c \in \mathbb{R}$). z.zg.: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert. Beh.: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = c \quad (*)$

Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a+h_n \in D \ \forall n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. z.zg.: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} = c$.

Klar: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $x_n = a + h_n \ \forall n\in\mathbb{N}$ konvergiert gegen a. Wegen $(*)$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = c$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} = c$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $c = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ und φ definiert durch $\varphi(a+h) = f(a+h) - f(a) - ch$ für alle $h\in\mathbb{R}$ mit $a+h\in D$. Dann ist $f(a+h) = f(a) + ch + \varphi(a+h)$ für diese h, und $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-ch}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$- \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c - c = 0$$

„(iii) $\Rightarrow$ (i)" Vor: $f(a+h) = f(a) + ch + \varphi(a+h)$

für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $a+h \in D$ und ein $c \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{wobei } \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h)}{h} = 0}$

z.zg.: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

z.zg.: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = c$ Definiere

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $h_n = x_n - a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n} =$$

f

$=$

$\Rightarrow$

$= n \cdot x$

$= (n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{f(a)} + c\,h_n + \varphi(a+h_n) - \cancel{f(a)}}{h_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c\,h_n}{h_n} + \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(a+h_n)}{h_n} = c + 0 = c \qquad \square$$

B

ge

a

Bel

Zeige

Vor.:

$\Rightarrow \lim_{x\to}$

$= \lim_{x\to}$

Die Summenregel

Satz (7.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch $f + g$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(a) \quad = \quad f'(a) + g'(a).$$

Die Produktregel

Satz (7.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch fg in a differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(a) \quad = \quad f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Folgerung (7.6)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_n'(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist die Funktion f_n auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

zum Beweis von Folgerung 7.6

Ind-schritt $n \mapsto n+1$:

Ind-Vor.: $f_n'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x) \cdot id(x)$

$= (f_n \cdot id)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Produktregel

$\Rightarrow f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \cdot id(x) + f_n(x) \cdot id'(x)$

$= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = n \cdot x^n + x^n$

$= (n+1) \cdot x^n$.

Ableitung von Potenzreihen

Satz

(i) Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a und Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist die Funktion f im Fall $\rho \in \mathbb{R}^+$ auf $]a-\rho, a+\rho[$, im Fall $\rho = +\infty$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(ii) Die Ableitung erhält man in diesem Bereich durch die Potenzreihe

$$f'(x) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \quad ,$$

die sog. formale Ableitung der Potenzreihe $f(x)$.

(Der Beweis wird in der Funktionentheorie-Vorlesung nachgeholt.)

Anwendungsbeispiele:

- $\exp'(x) = x$
- $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

Beispiele für die Ableitung von Potenzreihen

(1) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, n\, x^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x)$

Umparametrisierung

(2) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos'(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+2) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sin(x).$$

Die Quotientenregel

Satz (7.7)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Sei $a \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f und g in a differenzierbar sind. Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \quad = \quad \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Folgerung

Die Formel $f_n'(x) = nx^{n-1}$ für die Ableitung von $f_n(x) = x^n$ ist nicht nur für $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gültig.

$\square$

Beweis der Quotientenregel:

geg: $f, g : D \to \mathbb{R}$, wobei $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$

$a \in D$, f, g sind diff'bar in a

<u>Beh</u>: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Zeige zunächst: $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$

Vor: $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} =$$

$$\lim_{x\to a}\left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}$$ g diff'bar in a

$\Rightarrow$ g stetig in a $\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=g(a) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}=\frac{1}{g(a)^2}$

insgesamt: $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}$

$$=-g'(a)\cdot\frac{1}{g(a)^2}=-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Produktregel $\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)=$

$$f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)}+f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{g(a)}-f(a)\cdot\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

$$= -g'(a) \cdot \frac{1}{g(a)^2} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2} \qquad \square$$

<u>Bem</u>: Die Regel $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, falls f_n durch $f_n(x) = x^n \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist das bereits gezeigt. Ist $n < 0$, dann ist $m = -n \in \mathbb{N}$, und $f_n(x) = \frac{1}{f_m(x)} \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f_n'(x) = \left(\frac{1}{f_m}\right)'(x)$

$$= -\frac{f_m'(x)}{f_m(x)^2} = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = (-m) \cdot x^{m-1-2m} = (-m) \, x^{-m-1}$$

$= n \cdot x^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die Kettenregel

Satz (7.8)

Seien D und E Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei $a \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a differenzierbar ist und dass g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) \quad = \quad g'(f(a))f'(a).$$

(Leider habe ich vergessen, zwei Tafeln zu fotographieren. Ich versuche, den Tafelanschrieb möglichst originalgetreu wiederzugeben.)

Gegeben sind zwei Teilmenge $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$. Außerdem ist $a \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a und g in $b = f(a)$ differenzierbar ist. Das bedeutet, dass die Grenzwerte

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{und} \quad g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

existieren.

Für alle $x \in D$ mit $f(x) \neq f(a)$ gilt

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Definiere $\tilde{g} : D \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} & \text{falls } f(x) \neq f(a) \\ g'(b) & \text{falls } f(x) = f(a) \end{cases}$$

Die Funktion $\tilde{g}$ ist in a stetig, weil g im Punkt b differenzierbar ist.

Nachweis der Stetigkeit von $\tilde{g}$ in a

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_n x_n = a$. Zu zeigen ist $\lim_n \tilde{g}(x_n) = \tilde{g}(a)$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Existenz der Grenwerts $g'(b)$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\left|\frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b)\right| \;<\; \varepsilon$$

für alle $y \in E \setminus \{b\}$ mit $|y-b| < \delta$ erfüllt ist. Außerdem existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Ist $f(x_n) = f(a)$, dann gilt $|\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(b)| = |g'(b) - g'(b)| = 0 < \varepsilon$. Ist dagegen $f(x_n) \neq f(a)$, dann gilt $|\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(b)| =$

Beweis von Satz 7.8 (Forts.)

$$|\hat{g}(x_n) - g'(b)| = \left| \frac{g(f(x_n)) - g(b)}{f(x_n) - f(a)} - g'(b) \right|$$

$< \varepsilon$ wegen $|f(x_n) - f(a)| < \delta$, also in beiden Fällen $|\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(b)| < \varepsilon$. ($\Rightarrow$ Stetigkeit von $\tilde{g}$)

$\Rightarrow$ erhalten $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} =$ gültig für $f(x) = f(a)$ und $f(x) \neq f(a)$

$$\lim_{x \to a} \tilde{g}(x) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \tilde{g}(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tilde{g}(a) \cdot f'(a)$$

$$= g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \qquad \square$$

Anmerkung zum Beweis der Kettenregel

Der hier vorgestellte Beweis weicht von der Darstellung im Skript leicht ab. Dort wurde die Hilfsfunktion $\tilde{g}$ auf dem Definitionsbereich E der Funktion g definiert, hier dagegen auf dem Definitionsbereich D von f. Der Nachweis der Stetigkeit von $\tilde{g}$ im Punkt a bei der Variante hier etwas aufwändiger, aber beide Wege sind möglich.

Anwendungsbeispiele für die Kettenregel

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^2+5)^7$

Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2+5,\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^7$

$\Rightarrow (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2+5) = (x^2+5)^7 = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h \circ g = f$

Kettenregel $\Rightarrow f'(x) = (h \circ g)' = h'(g(x))\ g'(x)$

$= 7 \cdot g(x)^6 \cdot 2x = 7 \cdot (x^2+5)^6\, 2x = 14x \cdot (x^2+5)^6$

$$= 7 \cdot g(x)^6 \cdot 2x = 7 \cdot (x^2+5)^6 \, 2x = 14x \cdot (x^2+5)^6$$

(2) Erinnerung: $\exp_b(x) = \exp(x \cdot \ln(b))$

$\Rightarrow \exp_b = \exp \circ f$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot \ln(b)$

Kettenregel $\Rightarrow \exp_b'(x) = (\exp \circ f)'(x) = \exp'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= \exp(x \cdot \ln(b)) \cdot \ln(b) = \ln(b) \cdot \exp_b(x)$