Symmetrie der Sinus- und Kosinusfunktion, Eulersche Gleichung

Satz (6.16)

Sinus- und Kosinusreihe konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Sie definieren auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen, die als Sinus- bzw. Kosinusfunktion bezeichnet werden. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Satz (6.17)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Funktionalgleichungen von Sinus- und Kosinusfunktion

Lemma (6.19)

Sinus- und Kosinusfunktion erfüllen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen.

(i) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(ii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(iii) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

(iv) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

(v) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Die Gleichungen unter (i) und (ii) bezeichnet man als Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion.

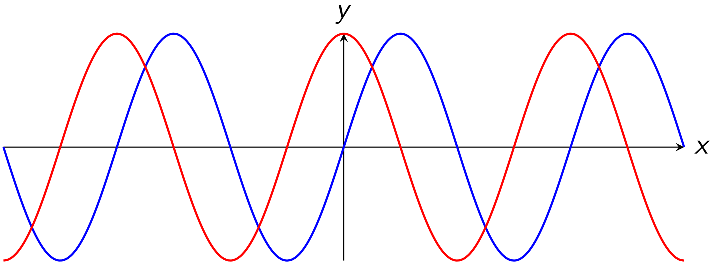
Werte der Sinus- und Kosinusfunktion

Lemma (6.20)

Die Kosinusfunktion besitzt im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle ξ. Das Doppelte 2ξ dieser Nullstelle wird die Kreiszahl π genannt. Die Werte von Sinus- und Kosinusfunktion an den Stellen $\frac{k}{2}\pi$ mit $0 \leq k \leq 4$ sind durch folgende Tabelle gegeben.

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Verlauf von Sinus- und Kosinusfunktion



Monotonieverhalten von Sinus- und Kosinusfunktion

Satz (6.21)

(i) Die Sinusfunktion hat die Nullstellenmenge $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist im Bereich $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton wachsend und im Bereich $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ streng monoton fallend.

(ii) Die Kosinusfunktion hat die Nullstellenmenge $\{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist im Bereich $[0, \pi]$ streng monoton fallend umd im Bereich $[\pi, 2\pi]$ streng monoton wachsend.

(iii) Sinus- und Kosinusfunktion erfüllen die Gleichungen $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ und $\cos(x) = \sin(x+\frac{1}{2}\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

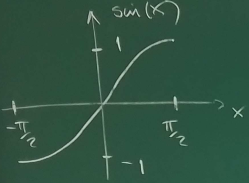
Satz (6.22)

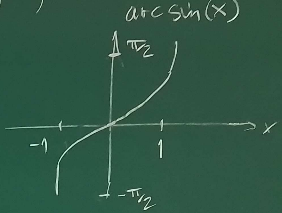
(i) Die Sinusfunktion bildet das Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend.

(ii) Die Kosinusfunktion bilet das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton fallend.

Man bezeichnet diese Umkehrfunktionen als Arcus sinus bzw. Arcus cosinus.

Satz 6.22 (nur Teil (i))





bereits bekannt: $\sin|_{[-\pi/2, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \to [-1, 1]$

ist stetig und streng monoton wachsend

streng mon. wachsend $\Rightarrow$ injektiv

Surjektivität: Sei $c \in [-1, 1]$, z.zg. $\exists x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

... bekannt: $\sin|_{[-\pi/2, \frac{\pi}{2}]}: [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \to [-1, 1]$
ist stetig und streng monoton wachsend

mit $\sin(x) = c$. 1. Fall: $c = -1 \Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{2}) = c$

2. Fall: $c = 1 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = c$

3. Fall: $-1 < c < 1 \to \sin(-\frac{\pi}{2}) < c < \sin(\frac{\pi}{2}) \xRightarrow[\text{Zwischenwertsatz}]{\text{Stetigkeit}}$

$\exists x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $\sin(x) = c$

Da die Fkt. bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion.

Mit $\sin|_{[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]}$ ist auch die Umkehrfkt. stetig und streng monoton wachsend.

Tangensfunktion und Arcus Tangens

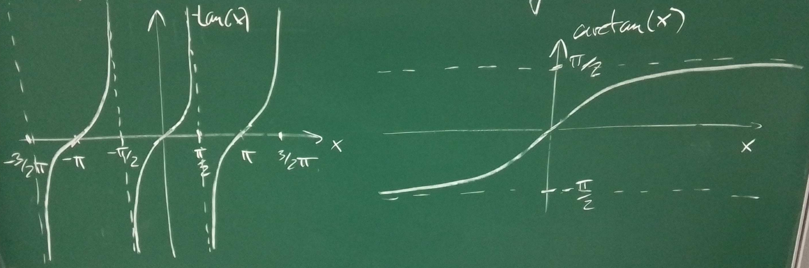
Satz (6.23)

(i) Die Tangensfunktion ist auf $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ durch $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ definiert und dort stetig.

(ii) Ihre Einschränkung auf $\left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$ ist streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.

(iii) Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und ebenfalls streng monoton wachsend. Sie wird als Arcus tangens bezeichnet.

Tangensfunktion und Arkus tangens



Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Man nennt $a \in D$ einen inneren Punkt von D, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq D$ erfüllt ist.

Definition der Differenzierbarkeit

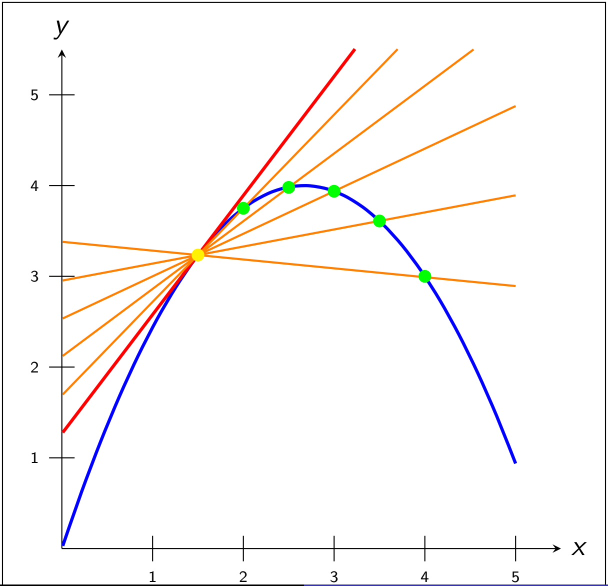
Definition (7.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein innerer Punkt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird differenzierbar an der Stelle a genannt, wenn

$$f'(a) \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

als Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Man nennt $f'(a)$ in diesem Fall die Ableitung von f an der Stelle a. Wir nennen die Funktion f differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Veranschaulichung der Differenzierbarkeit



Beispiele zur Differenzierbarkeit

(i) Sei $c \in \mathbb{R}$ und die Funktion f gegeben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, mit Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist überall differenzierbar, mit Ableitung $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist überall differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, mit der Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für jedes $x \in D$.

(v) Die Funktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^\times$ differenzierbar, aber im Punkt 0 nicht differenzierbar.

(vi) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist im Punkt $a = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiele zur Differenzierbarkeit

(i) $c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ (konstante Fkt.)

Sei $a \in \mathbb{R}$. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a}$

$= \lim_{x \to a} 0 = 0$

(ii) Sei $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abb. $x \mapsto x$ und $a \in \mathbb{R}$.

$id'(a) = \lim_{x \to a} \frac{id(x) - id(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1$

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$ Sei $a \in \mathbb{R}$.

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a}$

$= \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$

Bem.: In manchen Lehrbüchen wird die Def. der Ableitung auch in der Form

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

angegeben. In dieser Form lautet die Rechnung

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a$$

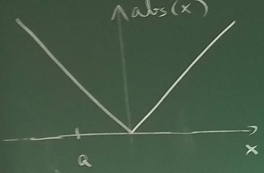
(iv) $f: D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, wobei $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $a \in D$. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a - x}{(x - a) \cdot ax} = \lim_{x \to a} -\frac{1}{ax}$$

$$= -\frac{1}{a^2}$$

(v) Betragsfunktion $\text{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$



Beh: (1) $\text{abs}'(a) = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$

(2) $\text{abs}'(a) = -1$ falls $a < 0$

(3) Im Nullpunkt ist abs nicht differenzierbar.

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. zzg: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{abs}(x) - \text{abs}(a)}{x - a} = 1$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (*)

zzg: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{abs}(x_n) - \text{abs}(a)}{x_n - a} = 1$

(*) angewendet auf $\varepsilon = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, so dass

(v) Betragsfunktion $\mathrm{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$

$|x_n - a| < a \ \forall n \geq N \implies a - a < x_n < a + a \ \forall n \geq N$

$\implies x_n > 0 \ \forall n \geq N \implies \mathrm{abs}(x_n) = x_n \ \forall n \geq N$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(x_n) - \mathrm{abs}(a)}{x_n - a} \underset{\substack{\mathrm{abs}(x_n) = x_n \\ \forall n \geq N}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$. z.zg: $\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{abs}(x) - \mathrm{abs}(a)}{x - a} = -1$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $(**)$

z.zg: $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(x_n) - \mathrm{abs}(a)}{x - a} = -1$ $(**)$ angewendet auf $\varepsilon = -a \in \mathbb{R}^+$

$\implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < -a \implies \forall n \geq N : a + a < x_n < a + (-a)$

$\implies x_n < 0 \ \forall n \geq N \implies \mathrm{abs}(x_n) = -x_n \ \forall n \geq N \implies$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(x_n) - \mathrm{abs}(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-x_n) - (-a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} (-1) \cdot \frac{x_n - a}{x_n - a} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

(3) z.zg.: Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{abs}(x)-\mathrm{abs}(0)}{x-0}$ existiert nicht.

Ang. $c = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{abs}(x)-\mathrm{abs}(0)}{x-0}$ existiert $(c \in \mathbb{R})$

Dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ jeweils $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(x_n)-\mathrm{abs}(0)}{x_n-0} = c$ gelten.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(\frac{1}{n})-\mathrm{abs}(0)}{\frac{1}{n}-0}$$

A

Da

$(x_n$

$\lim_{n\to\infty}$

$\lim_{n\to\infty}$

$\frac{1}{n}$ =

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(-\frac{1}{n}) - \mathrm{abs}(0)}{(-\frac{1}{n}) - 0} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

$\Rightarrow 1 = c = -1$ ↯ Annahme war falsch, Grenzwert existiert nicht.

Da

von

wol

Es g

$= f($

(0)

$(c \in \mathbb{R})$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{\ldots(0)}{0} = c$

$\frac{\ldots(0)}{0}$

(vi) Beh.: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Ang. $c = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ existiert $(c \in \mathbb{R})$.

Dann gilt $c = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

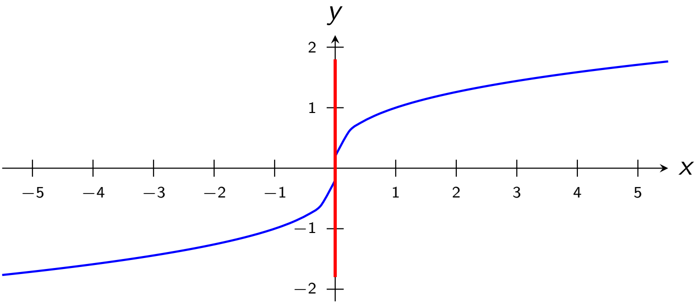
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow c = \lim_{n \to \infty} \frac{g(\frac{1}{n^3}) - g(0)}{\frac{1}{n^3} - 0} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n^3} - 0} = \lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$$

$\lightning$ zu $c \in \mathbb{R}$.

$\llcorner$ $\lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty$ Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte

Nicht-Differenzierbarkeit der Kubikwurzel im Nullpunkt

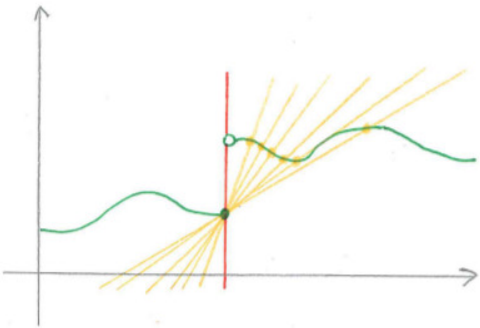


(Im Nullpunkt hat der Funktionsgraph eine senkrechte Tangente.)

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz (7.3)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Ist f im Punkt a differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.



Beweis von Satz 7.3:

geg.: $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ innerer Punkt

Vor.: f ist in a differenzierbar

z.zg.: f ist stetig in a

Da a ein innerer Punkt von D ist, ist die Stetigkeit von f in a gleichbed. mit $\lim_{x \to a} \tilde{f}(x) = f(a)$

wobei $\tilde{f} = f|_{D \setminus \{a\}}$ ist.

Es gilt $\lim_{x \to a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a} \left(\tilde{f}(x) - f(a) + f(a) \right)$

$= f(a) + \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x-a) \right) =$

$$f(a) + \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot \left(\lim_{x \to a} (x - a) \right) =$$

$$f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a) \qquad \square$$

Die Summenregel

Satz (7.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch $f + g$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(f + g)'(a) \quad = \quad f'(a) + g'(a).$$

Beweis von Satz 7.4:

geg.: $f, g: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, f, g in a diff'bar

z.zg.: $f+g$ in a diff'bar, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

gleichbedeutend: $\lim\limits_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$

Vor. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

$\square$

Die Produktregel

Satz (7.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in D$ ein Punkt, in dem f und g beide differenzierbar sind. Dann ist auch fg in a differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(a) \quad = \quad f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Folgerung (7.6)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_n'(a) = na^{n-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist die Funktion f_n auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

Beweis von Satz 7.5:

geg: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

f und g sind diff'bar in a, d.h. die Grenzwerte

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ und } g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

existieren in $\mathbb{R}$. z.zg: fg ist in a diff'bar, und es gilt $(fg)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) g(x) - f(a) g(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) g(x) - f(a) g(x)}{x - a} + \frac{f(a) g(x) - f(a) g(a)}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{x-a} \right) + \lim_{x \to a} \left(\frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

g stetig in a

$\square$