Exponentialfunktion und Eulersche Zahl

Proposition (6.9)

Es gilt $\exp(1) = e$, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet, die in Proposition 3.15 definiert wurde.

Beweis:

- Seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$.
- Dann gilt $\lim_n a_n = e$ und $\lim_n s_n = \exp(1)$.
- Auf Grund des Binomischen Lehrsatzes gilt

$$a_n \;=\; (1+\tfrac{1}{n})^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (\tfrac{1}{n})^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \;=$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \;\le\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \;=\; s_n.$$

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl (Forts.)

- Daraus folgt $e \leq \exp(1)$.
- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq 2$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
a_m &= (1 + \tfrac{1}{m})^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{m^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-k+1}{m} \\
&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-k+1}{m}.
\end{aligned}$$

- Für jedes $n \geq 2$ gilt also

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{m\to\infty} a_m \geq \\
1+1+\lim_{m\to\infty}&\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\,1\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot\ldots\cdot\frac{m-k+1}{m}\right) \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\lim_{m\to\infty}1\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot\ldots\cdot\frac{m-k+1}{m}\right) \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = s_n.
\end{aligned}
$$

- Aus $e \geq s_n$ für alle $n \geq 2$ wiederum folgt $e \geq \lim_n s_n = \exp(1)$, insgesamt also $e = \exp(1)$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Satz (6.10)

Die Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.

(i) Es gilt $\exp(0) = 1$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

(iii) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und definiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^+$.

Der natürliche Logarithmus

Satz (6.11)

Die Exponentialfunktion besitzt eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, die als natürlicher Logarithmus bezeichnet wird. Sie hat die folgenden Eigenschaften.

(i) Sie ist stetig, streng monoton wachsend und definiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}$.

(ii) Es gilt $\ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Weiter gilt $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Beweis von Satz 6.11, Teil (iii) und (iv)

zu (iii) $\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$

$\exp(1) = e \Rightarrow \ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$. $\exp(\ln(x) + \ln(y)) =$

$\exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = x\, y \xRightarrow{\ln(\cdot)}$

$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x y)$ ebenso:

$\exp(-\ln(x)) = \exp(\ln(x))^{-1} = x^{-1}$

$\xRightarrow{\ln(\cdot)} -\ln(x) = \ln(x^{-1})$

zu (iv) Nachweis von $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ (*)

z.zg.: $\lim\limits_{n \to \infty} \ln(x_n) = +\infty$ Sei $K \in \mathbb{R}^+$ z.zg.:

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ln(x_n) > K$

(*) $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N : x_n > \exp(K)$

Da ln streng monoton wachsend ist, erhalten wir für alle $n \geq N$ jeweils $\ln(x_n) > \ln(\exp(K)) = K$

Nachweis von $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ (**)

z.zg.: $\lim\limits_{n \to \infty} \ln(x_n) = -\infty$ Sei $K \in \mathbb{R}^+$. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ jeweils $\ln(x_n) < -K$ erfüllt ist. $(**) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$ $x_n < \exp(-K)$ Da ln streng monoton wachsend ist, folgt für alle $n \geq N$:

$$\ln(x_n) < \ln(\exp(-K)) = -K \qquad \square$$

Ze

vol

Ind

Ind.

exp(

= b

gilt a

Exponentialfunktion zu beliebiger Basis $b > 1$

Definition (6.12)

Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ sind die Exponentialfunktion und der Logarithmus zur Basis b definiert durch

$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp(x \ln(b))$ und $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

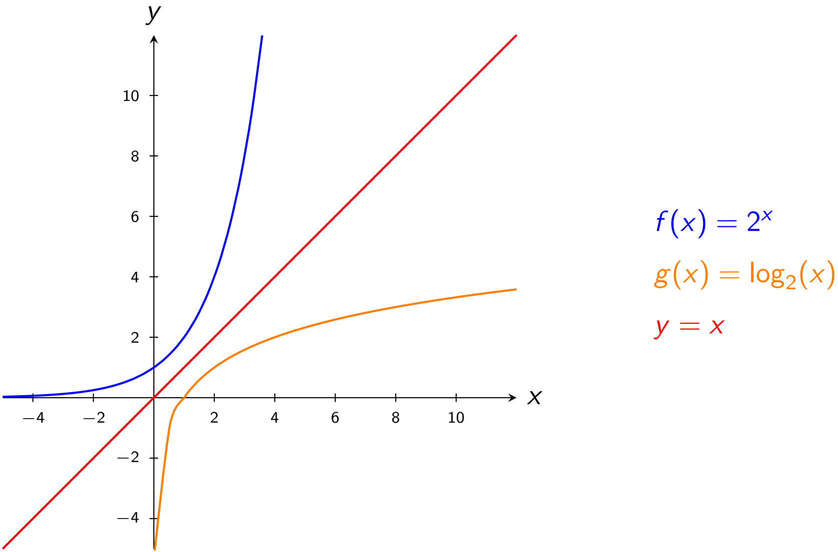
Proposition (6.13)

Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$.

(i) Es gilt $\exp_b(0) = 1$ und $\exp_b(1) = b$, $\exp_b(x + y) = \exp_b(x)\exp_b(y)$, $\exp_b(-x) = \exp_b(x)^{-1}$ und $\exp_b(x) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Weiter gilt $\log_b(1) = 0$, $\log_b(b) = 1$, $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ und $\log_b(x^{-1}) = -\log_b(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Der Graph der Logarithmusfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion an der Geraden $y = x$ (Eigenschaft der Umkehrfunktion).



Potenzierung mit reellen Exponenten

Proposition (6.14)

Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ und alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt $b^r = \exp_b(r)$, wobei der Ausdruck b^r wie in § 1 durch Potenzen und die Wurzelfunktionen definiert ist.

Auf Grund der Proposition kann die Definition von b^r auf beliebige $b \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ ausgedehnt werden: Man definiert $b^r = \exp_b(r)$ im Fall $r > 1$, $b^r = 1$ im Fall $b = 1$, und

$$b^r = \exp_{b^{-1}}(r)^{-1} = \exp_{b^{-1}}(-r) \qquad \text{für } b < 1.$$

Folgerung (6.15)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Potenzgesetze

$$(ab)^x = a^x b^x \quad , \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{und} \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

für

erfüllt

:

monoton

$\mathbb{N}$:

$\square$

Beweis von Prop. 6.14.

geg: $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$

Beh.: $\exp_b(r) = b^r \ \forall r \in \mathbb{Q}$

Zeige zunächst $\exp_b(n) \overset{(*)}{=} b^n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, durch vollst. Induktion über n

Ind-Anf: $\exp_b(0) = \exp(0) = 1 = b^0$

Ind-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, setze $(*)$ für n voraus.

$\exp_b(n+1) = \exp_b(n) \cdot \exp_b(1) = b^n \cdot b$

$= b^{n+1}$ ($\Rightarrow$ Beh.) Für jedes $m \in \mathbb{N}$

gilt außerdem $\exp_b(-m) = \exp_b(m)^{-1} =$

$(b^m)^{-1} = b^{-m}$ Also gilt die Gleichung für alle ganzen Zahlen. Sei nun $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$(\exp_b(r))^n = \exp_b(\underbrace{r + \dots + r}_{n\text{-mal}}) = \exp_b(nr)$$

$\llcorner$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ angewendet auf n Faktoren

$$= \exp_b(m) = b^m \underset{\sqrt[n]{\cdot}}{\Longrightarrow} \exp_b(r) = \sqrt[n]{b^m} = b^{m/n} = b^r \qquad \square$$

Symmetrie der Sinus- und Kosinusfkt., Eulersche Gleichung

Satz (6.16)

Sinus- und Kosinusreihe konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Sie definieren auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen, die als Sinus- bzw. Kosinusfunktion bezeichnet werden. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Satz (6.17)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x) + i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{ix^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).\end{aligned}$$

- Sei $a_n = (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{ix^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt jeweils

$$a_{2n} + a_{2n+1} =$$

$$(-1)^{2n}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} + \frac{ix^{4n+1}}{(4n+1)!}\right) + (-1)^{2n+1}\left(\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{ix^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)$$

Beweis von Satz 6.17 (Forts.)

$$= \quad \frac{x^{4n}}{(4n)!} + i\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - i\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$$

$$= \quad b_{4n} + b_{4n+1} + b_{4n+2} + b_{4n+3}$$

mit $b_n = \dfrac{(ix)^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt

$$\cos(x) + i\sin(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$$

$$= \quad \sum_{n=0}^{\infty} (b_{4n} + b_{4n+1} + b_{4n+2} + b_{4n+3})$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{4n+3} b_k \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad = \quad \exp(ix).$$

Restgliedabschätzung für Sinus und Kosinus

Lemma (6.18)

Die Restglieder von Kosinus- und Sinusfunktion gegeben durch

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{n+1}(x)\ , \ \ r_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r'_{n+1}(x)\ , \ \ r'_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

erfüllen die Abschätzungen

$$|r_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq 2n+3$$

und

$$|r'_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq 2n+4.$$

Beweis von Lemma 6.18

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Definition

$$r_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1+k} \frac{x^{2n+2k+2}}{(2n+2k+2)!}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit

$$a_k = \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4) \cdot \ldots \cdot (2n+2k+2)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

- Nach Definition ist $a_0 = 1$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ jeweils

$$a_{k+1} = a_k \frac{x^2}{(2n+2k+3)(2n+2k+4)}.$$

Beweis von Lemma 6.18 (Forts.)

- Auf Grund der Konvergenz der Reihe gilt $\lim_k a_k = 0$.
- Unter der Voraussetzung $|x| \leq 2n + 3$ gilt außerdem $a_{k+1} < a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
- Sei nun s_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Diese erfüllt die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums.
- Wie im Beweis dieses Kriteriums überprüft man, dass die Teilfolge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Teilfolge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

Beweis von Lemma 6.18 (Forts.)

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten somit die Ungleichungen

$$1 \;=\; s_0 \;\geq\; s_{2n} \;>\; s_{2n+1} \;\geq\; s_1 \;>\; 0.$$

  also insbesondere $s_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- Dies zeigt, dass der Grenzwert der Reihe in $[0,1]$ liegt. Wir erhalten die gewünschte Abschätzung $|r_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.
- Für die Restgliedabschätzung der Sinusfunktion müssen die Formeln nur geringfügig modifiziert werden (siehe Skript).

Funktionalgleichungen von Sinus- und Kosinusfunktion

Lemma (6.19)

Sinus- und Kosinusfunktion erfüllen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen.

(i) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(ii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(iii) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

(iv) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

(v) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Die Gleichungen unter (i) und (ii) bezeichnet man als Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion.

Beweis von Lemma 6.19, Teil (i) und (ii)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} \overset{(*)}{=} e^{ix} \cdot e^{iy}$$

$$= (\cos(x) + i\sin(x))\,(\cos(y) + i\sin(y)) =$$

$$\cos(x)\cos(y) + i\sin(x)\cdot\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) +$$

$$i^2 \sin(x)\sin(y) = (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y))$$

$$+ i\cdot(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$$ Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten liefert (i) und (ii).

und Imaginärteil auf beiden Seiten liefert (i) und (ii).

Anmerkung zu (*): Die Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ der e-Funktion gilt für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$. (Die Rechnung mit den Cauchy-Produkten ist auch für komplexe Zahlen gültig.) $\square$

Werte der Sinus- und Kosinusfunktion

Lemma (6.20)

Die Kosinusfunktion besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle ξ. Das Doppelte 2ξ dieser Nullstelle wird die Kreiszahl π genannt. Die Werte von Sinus- und Kosinusfunktion an den Stellen $\frac{k}{2}\pi$ mit $0 \leq k \leq 4$ sind durch folgende Tabelle gegeben.

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Beweis von Lemma 6.20

- Nach Lemma 6.18 ist $\sin(x) = x + r_1'(x)$ mit $|r_1'(x)| \leq \frac{1}{6}|x|^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 4$.
- Für $x \in]0, 2]$ folgt also $|\frac{r_1'(x)}{x}| \leq \frac{1}{6}|x|^2 \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Es folgt

$$\sin(x) \;=\; x + r_1'(x) \;=\; x(1 + \tfrac{r_1'(x)}{x}) \;\geq\; x(1 - \tfrac{2}{3}) \;=\; \tfrac{1}{3}x > 0.$$

- Außerdem ist $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + r_2(x)$ mit $|r_2(x)| \leq \frac{1}{24}|x|^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 5$.
- Insbesondere gilt $r_2(2) \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, also

$$\cos(2) \;\leq\; 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 + \tfrac{2}{3} \;=\; 1 - 2 + \tfrac{2}{3} \;=\; -\tfrac{1}{3}$$

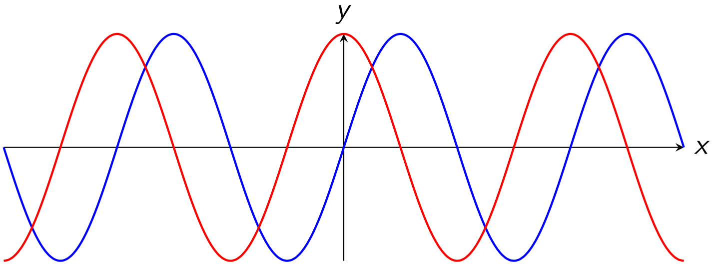
Beweis von Lemma 6.20 (Forts.)

- Mit Hilfe der Gleichungen aus Lemma 6.19 können wir nun zeigen, dass die Kosinusfunktion im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend ist.
- Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y \leq 2$ vorgegeben. Dann gilt $0 < \frac{1}{2}(x + y) \leq 2$ und $0 < \frac{1}{2}(y - x) \leq 1 < 2$.
- Daraus folgt $\sin(\frac{x+y}{2}) > 0$ und $\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$.
- Wir erhalten $\cos(y) - \cos(x) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) < 0$ und somit $\cos(x) > \cos(y)$.
- Einsetzen in die Kosinusreihe liefert $\cos(0) = 1$.
- Auf Grund der Stetigkeit der Kosinusfunktion und wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) = -\frac{1}{3} < 0$ liefert der Zwischenwertsatz eine Nullstelle ξ im Intervall $[0, 2]$. Wir setzen $\pi = 2\xi$.

Beweis von Lemma 6.20 (Forts.)

- Weil die Kosinusfunktion im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend ist, kann es in diesem Intervall keine weitere Nullstelle geben.
- Einsetzen in die Sinusreihe liefert $\sin(0) = 0$.
- Außerdem gilt $\sin(\frac{1}{2}\pi)^2 + \cos(\frac{1}{2}\pi)^2 = 1$,
  wegen $\cos(\frac{1}{2}\pi)^2 = 0$ also $\sin(\frac{1}{2}\pi)^2 \in \{\pm 1\}$.
- Weil die Sinusfunktion im Intervall $]0, 2]$ nur positive Werte annimmt und $\frac{1}{2}\pi$ in diesem Intervall enthalten ist, folgt $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$.
- Die übrigen Werte erhält man nun durch Anwendung der Additionstheoreme von Sinus und Kosinus.

Verlauf von Sinus- und Kosinusfunktion



Monotonieverhalten von Sinus- und Kosinusfunktion

Satz (6.21)

(i) Die Sinusfunktion hat die Nullstellenmenge $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist im Bereich $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton wachsend und im Bereich $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ streng monoton fallend.

(ii) Die Kosinusfunktion hat die Nullstellenmenge $\{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist im Bereich $[0, \pi]$ streng monoton fallend umd im Bereich $[\pi, 2\pi]$ streng monoton wachsend.

(iii) Sinus- und Kosinusfunktion erfüllen die Gleichungen $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis von Satz 6.21:

zu (iii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\cdot\cos(\pi) + \sin(\pi)\cdot\cos(x)$$

$$= \sin(x)\cdot(-1) + 0\cdot\cos(x) = -\sin(x)$$

zeige genauso: $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$

$$\sin\left(x+\tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin(x)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\cdot\cos(x)$$

$$= \sin(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) = \cos(x)$$

zu (ii) z. zg.: (1) cos streng mon. fallend auf $[0,\pi]$

(2) cos streng mon. wachsend auf $[\pi, 2\pi]$

zu (1) bekannt: cos streng mon. fallend auf $[0,2]$, und $\frac{1}{2}\pi \in \,]0,2[\; \Rightarrow$ cos streng mon. fallend auf $[0, \frac{1}{2}\pi]$

Beob.: Für alle $x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ gilt
$\pi - x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ und $\cos(\pi - x) =$
$-\cos(-x) = -\cos(x)$. Seien nun
$u, v \in [0, \pi]$ mit $u < v$. z.zg.:
$\cos(u) > \cos(v)$.

1. Fall: $u, v \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ bereits erledigt

2. Fall: $u, v \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$. Setze $u' = \pi - u$,
$v' = \pi - v \overset{u<v}{\Longrightarrow} u' > v' \overset{\text{1. Fall}}{\Longrightarrow}$

3

Da

und

dan

cos(

zu (2

z.zg.

$\Rightarrow u'$

$-\cos(u)$

$\cos(u') < \cos(v') \xRightarrow{\text{Beob.}} -\cos(u) < -\cos(v)$

$\Rightarrow \cos(u) > \cos(v)$

3. Fall: $u \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, $v \in]\frac{1}{2}\pi, \pi]$

Dann ist $\cos(u) \geq 0$ ($= 0$ nur für $u = \frac{1}{2}\pi$)

und $\cos(v) < 0$, denn: Setzt man $v' = \pi - v$, dann gilt $v' \in [0, \frac{1}{2}\pi[\Rightarrow \cos(v') < 0 \Rightarrow$

$\cos(v) = -\cos(v') < 0$. also: $\cos(u) > \cos(v)$

zu (2) Seien $u, v \in [\pi, 2\pi]$ mit $u < v$.

z.zg. $\cos(u) < \cos(v)$. Setze $u' = u - \pi$, $v' = v - \pi$

$\Rightarrow u', v' \in [0, \pi] \xRightarrow{(1)} \cos(u') > \cos(v') \Rightarrow$

$-\cos(u) > -\cos(v) \Rightarrow \cos(u) < \cos(v)$.

(Rest siehe Skript) $\square$

$-u$,