

Definition (6.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine beliebige Teilmenge und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{K}$ -wertiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ auf D . Sei $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ eine weitere Funktion. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

- (i) **punktweise** gegen f , wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gegen $f(x)$ konvergiert
- (ii) **gleichmäßig** gegen f , wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in D$ erfüllt ist.

Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf D auch die punktweise Konvergenz auf D . In beiden Fällen nennt man f auch die **Grenzfunktion** der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definition (6.4)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann nennt man die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die **Potenzreihe in Entwicklungspunkt a** mit der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beispiele für Potenzreihen

- die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
(Entwicklungspunkt $a = 0$, Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$
gegeben durch $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$)
Diese Reihe konvergiert auf $] -1, 1[$ punktweise, aber
nicht gleichmäßig, gegen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- die **Logarithmusreihe** $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$
(Entwicklungspunkt $a = 1$, Koeffizientenfolge gegeben durch
 $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n \geq 1$)

Beispiele für Potenzreihen (Forts.)

- die **Exponentialreihe** $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- die **Sinusreihe** $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
- die **Kosinusreihe** $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

Definition des Konvergenzradius

Definition (6.5)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe und $D_{\text{conv}} \subseteq \mathbb{K}$ ihr Konvergenzbereich. Dann nennt man

$$\rho(f) = \sup\{|x-a| \mid x \in D_{\text{conv}}\}$$

den **Konvergenzradius** von $f(x)$. Nach Definition ist $\rho(f) \in \mathbb{R}_+$ oder $\rho(f) = +\infty$ möglich.

Bedeutung des Konvergenzradius

Proposition (6.6)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe, $\rho = \rho(f)$ ihr Konvergenzradius und $x \in \mathbb{K}$.

(i) Ist $|x-a| < \rho$, dann **konvergiert** f in x absolut.

(ii) Ist $|x-a| > \rho$, dann **divergiert** die Potenzreihe.

Für Punkte $x \in K$ mit $|x-a| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Im Fall $\rho = 0$ gilt $D_{\text{conv}} = \{a\}$, im Fall $\rho = +\infty$ ist $D_{\text{conv}} = \mathbb{K}$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$ gilt für den Konvergenzbereich also

$$]a - \rho, a + \rho[\subseteq D_{\text{conv}} \subseteq [a - \rho, a + \rho].$$

Bestimmung des Konvergenzradius der bisher betrachteten Reihen

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolute Konvergenz auf $]-1, 1[$
Divergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$
→ Konvergenzradius 1

- Logarithmusreihe $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$

Mit dem Leibniz-Kriterium kann gezeigt werden, dass die Reihe für $|x-1| < 1$ konvergiert

Für $|x-1| > 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n = 0$ nicht mehr erfüllt → Reihe divergiert

nicht erfüllt $\rightarrow$ Reihe divergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius 1 (d.h. die Reihe konvergiert auf $]0,2[$ absolut)

• Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Zeige mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. ($\Rightarrow$ Konvergenzradius $+\infty$)

Sei $x \in \mathbb{R}$, o.B.d.A. $x \neq 0$. Setze $a_n = \frac{x^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow$ erhalte für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ Voraussetzungen des Quot.-kriteriums sind erfüllt.

• Ebenso zeigt man, dass Sinus- und Kosinusreihe den Konvergenzradius $+\infty$ haben.

Satz (6.7)

Der Konvergenzradius ρ einer beliebigen Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ über $\mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$\rho = \left(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Dies soll im Fall $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ bedeuten, dass $\rho = +\infty$, und im Fall $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, dass $\rho = 0$ gilt.

Beweis des Satzes von Cauchy-Hadamard

geg. Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

Sei $s = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, betrachte nur
den Fall $s \in \mathbb{R}^+$. z.zg: s^{-1} ist der Kon-
vergenzradius der Potenzreihe. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
mit $\varepsilon < s$. zeige:

- (1) Ist $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < (s+\varepsilon)^{-1}$, dann
konvergiert die Potenzreihe in x .
- (2) Ist $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| > (s-\varepsilon)^{-1}$, dann
divergiert die Potenzreihe in x .

Aus (1) folgt für den Konvergenzradius ρ die Abschätzung $\rho \geq (s+\varepsilon)^{-1}$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gewählt werden kann, folgt $\rho \geq s^{-1}$. Aus (2) folgt ebenso $\rho \leq (s-\varepsilon)^{-1} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \varepsilon < s$, und somit $\rho \leq s^{-1}$ insgesamt: $\rho = s^{-1}$

zu (1) Sei $x \in \mathbb{K}$ wie angeg. Wende auf die Glieder $a_n(x-a)^n$ das Wurzelkriterium an.

$$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |x-a| \quad (*)$$

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < s + \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < s + \varepsilon$$

für alle bis auf endl. viele $n \in \mathbb{N}$

Setze $\theta = |x-a| \cdot (s+\varepsilon) \Rightarrow \theta < 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} \leq \theta$ für alle bis auf endl.

viele $n \in \mathbb{N}$ Wurzelkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert
im Punkt x (sogar absolut)

zu (2) Sei $x \in \mathbb{K}$ wie angeg. $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} > s+\varepsilon$
 $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > s+\varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

(*) $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} > 1$ für unendlich viele
 $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n(x-a)^n| > 1$ für unendlich viele

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x-a)^n = 0$ gilt nicht

$\Rightarrow$ Die Reihe divergiert in x . □

Folgerung (6.8)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz (6.6) und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho$, wobei wir uns aber auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $[a - r, a + r]$ gleichmäßig gegen ihren Grenzwert und definiert dort eine **stetige Funktion**.

Beweis von Folgerung 6.8

geg. Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, Konvergenzradius ρ

Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < r < \rho^{(*)}$. Wenn wir zeigen können, dass die Potenzreihe auf $[a-r, a+r]$ gleichmäßig gegen ihre Grenzfkt. f konvergiert, dann ist die Grenzfkt. auf $[a-r, a+r]$ stetig, nach Satz 6.2. Weil r mit $(*)$ beliebig gewählt werden kann, ist f damit auf dem ges. offenen Intervall $]a-\rho, a+\rho[$ stetig (bzw. auf ganz $\mathbb{R}$, falls $\rho = +\infty$).

Nachweis der glm. Konvergenz: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Reihe konvergiert in

$x = a+r$ absolut $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergiert $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$,

so dass $\forall n \geq N: \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon$

Sei nun $x \in [a-r, a+r] \Rightarrow |x-a| \leq r$

Es ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ Für alle $n \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k - f(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (x-a)^k \right| \leq$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |x-a|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon$$

□

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl

Proposition (6.9)

Es gilt $\exp(1) = e$, wobei e die **Eulersche Zahl** bezeichnet, die in Proposition 3.15 definiert wurde.

Beweis:

- Seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}$.
- Dann gilt $\lim_n a_n = e$ und $\lim_n s_n = \exp(1)$.
- Auf Grund des **Binomischen Lehrsatzes** gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n. \end{aligned}$$

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl (Forts.)

- Daraus folgt $e \leq \exp(1)$.
- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq 2$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}a_m &= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{m^k} \\&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-k+1}{m} \\&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-k+1}{m}.\end{aligned}$$

Exponentialfunktion und Eulersche Zahl (Forts.)

- Für jedes $n \geq 2$ gilt also

$$\begin{aligned} e &= \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \geq \\ &1 + 1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-k+1}{m} \right) \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-k+1}{m} \right) \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = s_n. \end{aligned}$$

- Aus $e \geq s_n$ für alle $n \geq 2$ wiederum folgt
 $e \geq \lim_n s_n = \exp(1)$, insgesamt also $e = \exp(1)$.

Satz (6.10)

Die Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.

- (i) Es gilt $\exp(0) = 1$, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
 $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ und $\exp(x) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
- (iii) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und definiert eine **bijektive Abbildung** zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^+$.

Beweis von Satz 6.10

Nach Def. gilt $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = 1$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, z.z. $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$,

$$\text{also } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right)$$

Erinnerung: Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent,

dann gilt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k \quad (\text{Cauchyprodukt})$$

Setze $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $b_n = \frac{y^n}{n!}$. Auf Grund des Konvergenzradius $+\infty$ sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Setze

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \frac{1}{n!} (x+y)^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y) \end{aligned}$$

Die Gleichung für das Cauchy-Produkt liefert also $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$.

$$\begin{aligned} \text{Sei nun } x \in \mathbb{R}. \quad s.o. \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(-x) &= \exp(x+(-x)) \\ &= \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(-x) = \exp(x)^{-1} \end{aligned}$$

Ist $x \geq 0$, dann gilt $\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
 $\geq 1 + 0 = 1 > 0$. Ist $x < 0$, dann ist
 $-x > 0 \Rightarrow \exp(-x) > 0 \Rightarrow \exp(x)$
 $= \exp(-x)^{-1} > 0$

zu (ii) z.zg. (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

zu (1) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. z.zg. $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = +\infty$

Sei $K \in \mathbb{R}^+$ z.zg. $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: zu (3)

$$\forall n \geq N : \exp(x_n) > K$$

Schreibe $\exp(x) = 1 + x + r_2(x)$ mit $r_2(x)$
 $= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ gibt es

ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n > K \quad \forall n \geq N$. Für diese n gilt dann erstb. $x_n \geq 0$ und somit $r_2(x_n) \geq 0$.
 $\Rightarrow \exp(x_n) = 1 + x_n + r_2(x_n) \geq 1 + x_n > 1 + K > K$ für alle $n \geq N$.

zu (2) Setze als bekannt voraus: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, dann gilt die Äquivalenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = +\infty$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.
 z.zg. $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = +\infty \stackrel{.(1)}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-x_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-x_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n)^{-1} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

Da $(\exp(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aus positiven Zahlen besteht, liefert die Äquivalenz von oben: $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = 0$

zu (iii) z.zg. (3) $\exp$ ist streng monoton wachsend
 (4) $\exp$ definiert eine Bijektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

zu (3) Für alle $x > 0$ gilt $\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
 &> 1. \text{ Seien nun } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y. \Rightarrow \\
 &y - x > 0 \Rightarrow \exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \\
 &\exp(x) \underbrace{\exp(y - x)}_{> 1} > \exp(x).
 \end{aligned}$$

zu (4) bereits gezeigt: $\exp$ ist eine Abb. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$,
außerdem stetig. Wegen (3) ist sie injektiv.

zur Surjektivität: Sei $d \in \mathbb{R}^+$ z.zg.
 $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $\exp(c) = d$. $0 < d < +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ mit } \exp(a) < d$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} \text{ mit } b > a \text{ und } \exp(b) > d.$$

insgesamt: $\exp(a) < d$, $\exp(b) > d$, und
 $\exp|_{[a,b]}$ ist eine stetige Funktion Zwischenwertsatz
 $\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ mit $\exp(c) = d$. □