Umkehrfunktionen

Definition (5.18)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass die Menge D bijektiv auf $E = f(D)$ abgebildet wird. Dann nennt man die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : E \to D$ auch die Umkehrfunktion von f.

Beispiele:

- Für ungerades $k \in \mathbb{N}$ ist die k-te Wurzelfunktion $r_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, gegeben durch die in § 1 definierte k-te Wurzel, die Umkehrfunktion von $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$.
- Für gerades $k \in \mathbb{N}$ ist k-te Wurzelfunktion $r_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ die Umkehrfunktion von $p_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^k$.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz (5.19)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist f eine Bijektion auf ihr Bild $f(I)$, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beispielsweise ist die k-te Wurzelfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (für ungerades k) bzw. $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (für gerades k) eine stetige, streng monoton wachsende Funktion.

Beweis von Satz 5.19

geg: $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Def.-bereich $D \subseteq \mathbb{R}$
stetig, streng monoton wachsend bereits gezeigt:
f Bijektion $D \to E$, wobei $E = f(D)$
Umkehr-fkt. $g : E \to D$ streng mon. wachsend
noch z.zg: g stetig auf ganz E

Sei $y \in E$. (Erinnerung: Stetigkeit in y bedeutet:
Für jede Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ gilt
$\lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(y)$.) Ang. g ist in y <u>nicht</u>

stetig $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$,

also nicht $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y)$ $\Rightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

mit $|g(y_n) - g(y)| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

gleichbed.: $g(y_n) \leq g(y) - \varepsilon$ oder $g(y_n) \geq g(y) + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die beiden Mengen

$M_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid g(y_n) \geq g(y) + \varepsilon\}$, $M_- = \{n \in \mathbb{N} \mid g(y_n) \leq g(y) - \varepsilon\}$

Dann ist mind. eine der Mengen M_+, M_- unendlich. Betrachte den Fall, dass M_+ unendlich ist (anderer Fall analog).

Setze $x = g(y)$, gleichbed.: $f(x) = y$ $\Rightarrow$ $M_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq x + \varepsilon\}$, wobei $x_n = g(y_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. f streng mon. wachsend $\Rightarrow$ $y_n = f(x_n) \geq f(x+\varepsilon) > f(x) = y$. Setze $\varepsilon_1 = f(x+\varepsilon) - f(x)$ $\Rightarrow$ $y_n - y > f(x+\varepsilon) - y = f(x+\varepsilon) - f(x)$

$= \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}_+$ ↯ zu $\lim_{n \to \infty} y_n = y$. $\square$

Definition (6.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine beliebige Teilmenge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ auf D. Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine weitere Funktion. Man sagt, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

(i) punktweise gegen f, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gegen $f(x)$ konvergiert

(ii) gleichmäßig gegen f, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in D$ erfüllt ist.

Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf D auch die punktweise Konvergenz auf D. In beiden Fällen nennt man f auch die Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel für eine Folge von Funktionen, die punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen eine weitere Funktion konvergiert:

$D = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$ $\forall x \in D, n \in \mathbb{N}$

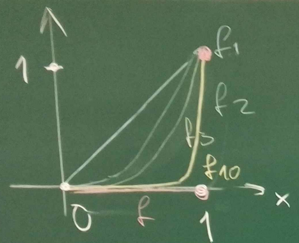
$$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

klar: Ist $0 \leq x < 1$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$= \lim_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$. ebenso:

$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 = f(1) \Rightarrow$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f



Die Folge konvergiert aber nicht gleichmäßig gegen f, denn: Ang., dass wäre der Fall, also

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Wende dies auf $\varepsilon = \frac{1}{2}$ an $\Longrightarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$$

Insb. gilt für alle $x \in [0,1[$ und alle $n \geq N$:

$x^n < \frac{1}{2} \iff x < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ ↯ da es für jedes $n \geq N$ auch Punkte im Intervall $[\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1[$ gibt.

Erhaltung der Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz

Definition (6.2)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$. Dann bezeichnet man die Teilmenge

$$D_{\mathrm{conv}} \quad = \quad \{ x \in D \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \}$$

als Konvergenzbereich der Funktionenfolge.

Satz (6.3)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger reellwertiger Funktionen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$, die auf D gleichmäßig gegen eine weitere Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f eine stetige Funktion auf D.

Beweis von Satz 6.3:

geg.: $D \subseteq \mathbb{K}$, Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-wertiger <u>stetiger</u> Funktionen auf D, $f: D \to \mathbb{K}$ weitere Funktion. Voraussetzung:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Sei $a \in D$. z.zg.: f ist stetig in a.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach dem ε-δ-Kriterium genügt es z.zg.: Es existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Wegen der glm. Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und für alle $x \in D$ jeweils

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ gilt.}$$

Betrachte die Differenz

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)$$

für jedes $x \in D$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ die Implikation

$$|x-a| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{gilt}$$

Für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt damit

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|$$

$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$. Also ist das ε-δ-Kri-

[glm Stetigkeit

terium für f im Punkt a erfüllt. $\square$

Definition der Potenzreihen

Definition (6.4)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann nennt man die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$f_n(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe in Entwicklungspunkt a mit der Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

- Ähnlich wie bei den Reihen in $\mathbb{K}$ bezeichnet der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

sowohl die in Definition (6.4) angegebene Funktionenfolge als auch die Grenzfunktion $f : D_{\mathrm{conv}} \to \mathbb{K}$.

Konkrete Beispiele für Potenzreihen.

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ liefert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (Entwicklungspunkt $a = 0$). Dies ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $f_1(x) = 1+x$, $f_2(x) = 1+x+x^2$, $f_3(x) = 1+x+x^2+x^3$ usw. Hier ist $D_{conv} =]-1, 1[$

Die Grenzfunktion f ist für $|x| < 1$ geg. durch $f(x) = \frac{1}{1-x}^{(*)}$. (Die Folge ist nicht identisch mit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.) Wert der geometrischen Reihe

(ii) Die Exponentialreihe ist geg. durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \left(\text{Folge der Koeff. } a_n = \frac{1}{n!}, \right.$$

Entwicklungspunkt $a = 0$)

$$\left(a_n = \frac{1}{n!}\ \forall n \in \mathbb{N},\ a = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$$

(iii) Die Sinusreihe ist geg. durch $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(iv) Die Reihe $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ wird Kosinusreihe genannt.

Entwicklungspunkt der Sinusreihe: $a = 0$

Koeffizienten: $a_k = 0$ falls k gerade ist, $a_k = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

falls k ungerade, $k = 2n+1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

B

$\Rightarrow$

Bew

geg.

radi

$\rho \in$

zu (i)

$\sum_{n=}^{\infty}$

Def von

Sei $\theta =$

Definition des Konvergenzradius

Definition (6.5)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe und $D_{\mathrm{conv}} \subseteq \mathbb{K}$ ihr Konvergenzbereich. Dann nennt man

$$\rho(f) \quad = \quad \sup\{|x-a| \mid x \in D_{\mathrm{conv}}\}$$

den Konvergenzradius von $f(x)$. Nach Definition ist $\rho(f) \in \mathbb{R}_+$ oder $\rho(f) = +\infty$ möglich.

Bedeutung des Konvergenzradius

Proposition (6.6)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe, $\rho = \rho(f)$ ihr Konvergenzradius und $x \in \mathbb{K}$.

(i) Ist $|x-a| < \rho$, dann konvergiert f in x absolut.

(ii) Ist $|x-a| > \rho$, dann divergiert die Potenzreihe.

Für Punkte $x \in K$ mit $|x-a| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Im Fall $\rho = 0$ gilt $D_{\mathrm{conv}} = \{a\}$, im Fall $\rho = +\infty$ ist $D_{\mathrm{conv}} = \mathbb{K}$.

Ergänzung zu Prop. 6.6: Ist der Konvergenzradius endlich, aber nicht null, also $\rho \in \mathbb{R}^+$, dann gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$]a-\rho, a+\rho[\underset{(i)}{\subseteq} D_{conv} \underset{(ii)}{\subseteq} [a-\rho, a+\rho]$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe auf der offenen Kreisscheibe um a vom Radius ρ absolut, und außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe, also für $x \notin \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq \rho\}$ divergiert sie.

$\frac{}{)!}x^{2n+1}$

Erinnerung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z^0 = 1$, insb. $0^0 = 1$

$\Rightarrow$ Für $z = a$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\underbrace{z-a}_{=0})^n = a_0$

Beweis von Prop. 6.6:

geg: Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ mit Konvergenzradius ρ. Wir beschränken uns auf den Fall $\rho \in \mathbb{R}^+$.

zu (i) Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < \rho$. Zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ist absolut konvergent. Nach Def von ρ gibt es ein $y \in D_{conv}$ mit $|x-a| < |y-a|$

Sei $\theta = \frac{|x-a|}{|y-a|}$. $\Rightarrow 0 \leq \theta < 1$

$$\Rightarrow |a_n||x-a|^n = |a_n|\cdot|y-a|^n \cdot \frac{|x-a|^n}{|y-a|^n} =$$

$|a_n|\cdot|y-a|^n\cdot\theta^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-a)^n$ konvergiert (wg. $y\in D_{conv}$)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n(y-a)^n = 0 \Rightarrow |a_n||y-a|^n \leq 1$

für alle bis auf endl. viele $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$|a_n||x-a|^n \leq \theta^n$ für alle bis auf endl. viele n

$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$ konvergiert (geom. Reihe) $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergiert nach dem

Majorantenkriterium.

Teil (ii) von Prop. 6.6 ist nach Def. des Konvergenz-radius erfüllt

Beispiel, das zeigt, dass für $|x-a| = \rho$ keine allgemeine Aussage möglich ist: Betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Man kann leicht zeigen, dass $\rho = 1$ gilt. Im Punkt $x = 1$ ist die Reihe divergent (Divergenz der harmonischen Reihe), in $x = -1$ ist sie konvergent (nach dem Leibniz-Kriterium).