Häufungspunkte, Berührpunkte und isolierte Punkte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bezeichnen wir als Folge in D, wenn $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition (5.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Man nennt a einen Häufungspunkt von D, wenn eine Folge in $D \setminus \{a\}$ existiert, die (eventuell uneigentlich) gegen a konvergiert. Einen Punkt $a \in D$, der kein Häufungspunkt von D ist, nennt man einen isolierten Punkt von D.

Ein Häufungspunkt a von D mit $a \notin D$ auch Berührpunkt der Menge D genannt.

Definition der Funktionsgrenzwerte

Definition (5.3)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, c \in \bar{\mathbb{R}}$. Ist a ein Berührpunkt von D, und gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \quad ,$$

so bezeichnet man c als Grenzwert von f im Punkt a.

Notation:

Die Schreibweise $\lim_{x\to a} f(x) = c$ bedeutet, dass c der Grenzwert von f im Punkt a ist.

Grenzwerte von Polynomfunktionen

Proposition (5.4)

Sei f eine Polynomfunktion gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$.

(i) Ist m gerade, dann gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Für ungerades m gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Beweis von Prop. 5.4

geg.: Polynomfkt. $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

zeige: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $f(x) = x^m(1+g(x))$ mit

$$g(x) = \frac{a_{m-1}}{x} + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}$$

Sei $c = \max\{2m|a_k| \mid 0 \le k \le m-1\}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > c$ und $x > 1$ gilt

$$|g(x)| \le \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|a_k|}{|x|^{m-k}} \underset{[x>1]}{\le} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|a_k|}{x} \underset{[x>c]}{<} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|a_k|}{c}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2m} = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) > -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$c \geq |a_k|$

mit $x > c$ und $x > 1 \Rightarrow f(x) > x^m(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x^m$ für diese x

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ Sei $K \in \mathbb{R}^+$

z.zg.: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) > K \;\forall n \geq N$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$x_n > \max\{1, c, 2K\} \;\forall n \geq N$. $\Rightarrow$ erhalte für alle $n \geq N$

jeweils $\underset{x_n > c \text{ und } x_n > 1}{f(x_n) > \frac{1}{2}x_n^m} \underset{x_n > 1}{\geq \frac{1}{2}x_n} \underset{x_n > 2K}{>} \frac{1}{2}(2K) = K$ $\square$

Definition (5.5)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf D. Dann bezeichnet man die Funktionen $f + g$ und fg auf D gegeben durch

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{für } x \in D$$

als Summe bzw. Produkt von f und g. Gilt zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann definiert man

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{für alle} \quad x \in D.$$

Die Funktion $\frac{f}{g}$ wird der Quotient von f und g genannt.

Verhalten der Funktionsgrenzwerte bei Verknüpfungen

Proposition (5.6)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, und sei $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ein Berührpunkt von D. Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ beide existieren und in $\mathbb{R}$ liegen, also endlich sind, dann gilt

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

und

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right),$$

insbesondere existieren diese Grenzwerte. Ist der Quotient $\frac{f}{g}$ auf D definiert, und ist $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, so gilt auch

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Beweis von Prop. 5.6, nur für Summen

geg: $D \subseteq \mathbb{R}$, a Berühr-punkt von D

$f, g : D \to \mathbb{R}$ Setze voraus: Die

Grenzwerte $c = \lim_{x \to a} f(x)$, $d = \lim_{x \to a} g(x)$

existieren und liegen in $\mathbb{R}$.

Beh.: $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = c + d$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D_a = D \setminus \{a\}$ mit

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$. z.zg.: $\lim_{n \to \infty} (f+g)(x_n) = c + d$

$c = \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

Frag

$$d = \lim_{x \to a} g(x) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(x_n) = d$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(f(x_n) + g(x_n) \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n) = c + d \quad \square$$

[Grenzwertsatz der Addition

(ii)

Sei

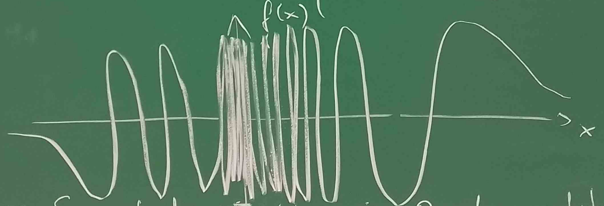
$\Rightarrow \lim_{n \to}$

n
D
(x)
hat mit
) = c + d
c

Problem bei einer „anschaulichen Definition der Stetigkeit

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



__Frage__: Springt die Funktion in 0 oder nicht?

Definition der Stetigkeit

Definition (5.7)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Man sagt, die Funktion f ist stetig im Punkt a, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ in D die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad \text{gilt.}$$

Die Funktion f wird stetig genannt, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele für stetige Funktionen

(i) Jede konstante Funktion auf einer beliebigen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist stetig.

(ii) Für jede Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist die identische Abbildung id_D stetig.

(iii) Die Betragsfunktion $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.

(iv) Die Signumsfunktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Sie ist im Punkt 0 unstetig, in allen übrigen Punkten stetig.

Beispiele für stetige Funktionen

(i) $c \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$

Beh: f ist in a stetig

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

z.zg.: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ Tatsächlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(a)$$

(ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, betrachte die Fkt.

$id_D : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Beh: id_D ist stetig in a

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} id_D(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a = id_D(a)$$

$\square$

(iii) Stetigkeit der Betragsfunktion

Betrachte die Fkt abs : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. <u>Beh.</u>: abs ist stetig in a

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

z.zg: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{abs}(x_n) = \mathrm{abs}(a)$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg:

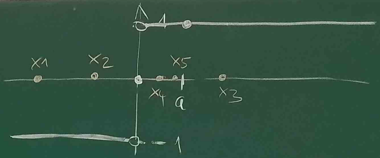
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |\mathrm{abs}(x_n) - \mathrm{abs}(a)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt

$|\mathrm{abs}(x_n) - \mathrm{abs}(a)| = ||x_n| - |a|| \underset{\uparrow \text{siehe Übungen}}{\leq} |x_n - a| < \varepsilon$

(iv) Signumsfunktion



Beh: (1) sgn unstetig in 0

(2) sgn ist stetig in a für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

zu (1) zu zeigen: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die zwar $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, aber nicht $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \operatorname{sgn}(0)$ erfüllt

Sei $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, andererseits aber

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0)$$

zu (2) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $a > 0$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. z.zg.: $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \operatorname{sgn}(a)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$$

$$\Longleftrightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

$|x_n - a| < \varepsilon$ Wende dies auf $\varepsilon = a$ an.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < a$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : a - a < x_n < a + a$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : x_n > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : \operatorname{sgn}(x_n) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \operatorname{sgn}(a)$$

(weil a positiv ist)

Betrachte nun den Fall $a < 0$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$. z.zg: $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \operatorname{sgn}(a)$

$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$|x_n - a| < \varepsilon$ Wende dies auf $\varepsilon = -a$ an.

(Wegen $a < 0$ gilt $-a \in \mathbb{R}^+$.)

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < -a$

$\Rightarrow \forall n \geq N : a - (-a) < x_n < a + (-a)$

$\Rightarrow \forall n \geq N : x_n < 0$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \operatorname{sgn}(x_n) = -1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1 \underset{a<0}{=} \operatorname{sgn}(a)$$

$\square$

(a)

Stetigkeit der rationalen Funktionen

Proposition (5.9)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, und sei $a \in D$. Wenn die Funktionen f und g im Punkt a stetig sind, dann gilt dasselbe für $f + g$ und fg. Ist der Quotient $\frac{f}{g}$ auf D definiert, so ist auch $\frac{f}{g}$ in a stetig.

Folgerung (5.10)

Alle Polynomfunktionen und rationalen Funktionen sind jeweils auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

$n(a)$

$\forall n \geq N:$

a_n.

$-a$

$(-a)$

Beweis von Folgerung 5.9 (nur für Produkte)

geg: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Setze voraus: f, g sind stetig in a

Beh: fg ist stetig in a

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

z.zg: $\lim_{n \to \infty} (fg)(x_n) = (fg)(a)$.

f stetig in $a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

g stetig in $a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(a)$

Grenzwertsatz der Multipl

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (fg)(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left(f(x_n) \cdot g(x_n)\right) = \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n)\right)\left(\lim_{n \to \infty} g(x_n)\right) = f(a)g(a) = (fg)(a) \quad \square$$

Die Komposition stetiger Funktionen

Proposition (5.11)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann ist auch die Funktion $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Anwendungsbeispiel für Prop. 5.11:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 5x + 7$ ist stetig (als Pol.-Fkt.)

$\mathrm{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig (gezeigt)

Prop. 5.11 $\Rightarrow$ $(\mathrm{abs} \circ f)(x) = \mathrm{abs}(f(x)) = |x^3 - 5x + 7|$

ist eine stetige Funktion.

ebenso: $(f \circ \mathrm{abs})(x) = f(|x|) = |x|^3 - 5|x| + 7$

ist eine stetige Funktion.

Beweis von Prop. 5.11: geg. $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$, stetige Fkt., wobei $D, E \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$

Sei $a \in D$. z.zg: $g \circ f$ ist stetig in a

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

z.zg: $\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$$

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$, f ist stetig in a $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$, g ist stetig in $f(a)$ $\Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$$

$\square$