

Das Cauchy-Kriterium

Satz (4.9)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq N$ gilt.

Folgerung (4.10)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Absolut konvergente Reihen

Definition (4.14)

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ wird **absolut konvergent** genannt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ der Absolutbeträge konvergiert.

Proposition (4.15)

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert im Sinne von Definition 4.4.

Satz (4.16)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}_+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $|a_n| \leq c_n$ für fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Folgerung (4.17)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe in $\mathbb{R}_+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Anwendung des Minorantenkriteriums

zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+7}$ ist divergent

Erinnerung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ ist konvergent für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

Daraus folgt die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ (denn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ ist konvergent} \stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist konvergent $\nmid$ zur Divergenz der harmonischen Reihe)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $\frac{1}{2n+7} \geq \frac{1}{3n} \Leftrightarrow$

$$2n+7 \leq 3n \Leftrightarrow 7 \leq n \quad \text{also: } \frac{1}{2n+7} \geq \frac{1}{3n} \text{ für fast}$$

alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Minorantenkriterium folgt aus der Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ also die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n+7}$.

Satz (4.18)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner existiere ein $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, so dass die Ungleichung

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

- **Achtung:** Es genügt **nicht** zu überprüfen, dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.
- Gilt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann folgt daraus die **Divergenz** der Reihe

Beweis des Quotientenkriteriums (Satz 4.18)

Vor: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$, $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \theta < 1, \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \quad \forall n \geq N$$

Ein einfacher Ind.-Beweis zeigt, dass

$$\text{daraus } |a_n| \leq \theta^{n-N} |a_N| \quad \forall n \geq N$$

Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$|a_n| \leq \theta^{-N} |a_N| \theta^n \quad \text{Dies ist bis auf}$$

eine konstante das n -te Glied der
geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$, die ge-

kanntlich konvergiert. Also folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aus dem Majorantenkriterium. $\square$

Anwendungsbeispiel: Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\text{Setze } a_n = \frac{n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$$

$$a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Setze $\theta = \frac{3}{4}$. Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} = \theta$$

Das Quotientenkriterium ist also anwendbar. $\square$

Umformulierung des Quotientenkriteriums

Folgerung (4.19)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ gilt und die Folge $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_{n \geq n_0}$ konvergiert, mit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

- (i) Gilt $\alpha < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- (ii) Gilt $\alpha > 1$, dann divergiert sie.

Im Fall $\alpha = 1$ ist keine Aussage möglich, d.h. es gibt Reihen mit dieser Eigenschaft, die konvergieren, und andere, die divergieren.

Satz (4.20)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass ein $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$ existiert, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Folgerung (4.21)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, mit $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- (i) Gilt $\alpha < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- (ii) Gilt $\alpha > 1$, dann divergiert sie.

Wiederum ist im Fall $\alpha = 1$ keine Aussage möglich.

Satz (4.22)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, und sei die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch $b_k = 2^k a_{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent.}$$

Beispiel: Für jedes $\alpha > 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ konvergent.

Anwendungsbeispiel für das Verdichtungs-
kriterium: Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$
für bel $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$

Setze $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_k = 2^k \cdot a_{2^k}$
 $= 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} = 2^k \cdot 2^{-\alpha k} = 2^{k(1-\alpha)}$
 $= \theta^k$ mit $\theta = 2^{1-\alpha} < 1$.

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$
konvergiert. Nach dem Verdichtungskriterium
konvergiert also auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Satz (4.23)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{K}$. Ist $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine **bijektive Abbildung**, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

5 - Anmerkung: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur im herkömmlichen Sinne konvergent, aber nicht absolut ("bedingt konvergent"), dann kann sich der Wert der Reihe durch Umrangung ändern.

□ Bsp:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Betrachte nun die Reihenfolge

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2-1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$

Die Summe hat sich durch die Umordnung halbiert.

Definition (4.24)

Das **Cauchy-Produkt** zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ im Körper $\mathbb{K}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit den Termen c_n gegeben durch

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die ersten Terme des Cauchy-Produkts $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$
der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sind geg. durch

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$

$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$

Satz (4.25)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ mit Grenzwerten a und b , wobei wir bei mindestens einer der beiden Reihen absolute Konvergenz voraussetzen. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchy-Produkt der beiden Reihen. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) ,$$

das Cauchy-Produkt konvergiert also gegen den Wert ab .
Konvergieren beide Reihen absolut, dann gilt dasselbe auch für das Cauchy-Produkt.

Definition der b -adischen Brüche

Definition (4.26)

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Ein b -adischer Bruch ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-r}^{\infty} a_n b^{-n}$$

wobei $r \in \mathbb{Z}$ sowie $0 \leq a_n < b$ und $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq -r$ gilt. Dabei bezeichnet man a_n als die n -te Stelle des b -adischen Bruchs.

Symbolisch stellt man b -adische Brüche in der Form

$$a_{-r} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 \dots$$

dar. Für $b = 10$ erhält man so die bekannte Dezimaldarstellung reeller Zahlen.

Beispiele für Dezimaldarstellungen.

(i) $r = -1$, $a_n = 3$ für alle $n \geq 1$

$$0.\overline{3} = 0.3333\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\stackrel{(*)}{=} 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = \frac{3}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$\uparrow$ geom. Reihe

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(ii) $0.\overline{9} = 0.999\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \dots =$ s.o.

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

Rechtsfortsetzung für die Unparametrisierung bei (*):

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n &= 3 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k \right) = 3 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} \right) \\ &= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Satz (4.27)

Jeder b -adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl.

Satz (4.28)

Jedes $a \in \mathbb{R}$ lässt sich in der Form $\pm s$ darstellen, wobei s den Wert eines b -adischen Bruchs $\sum_{n=-r}^{\infty} a_n b^{-n}$ bezeichnet.

Beweis von Satz 4.27:

Beh.: Jede Reihe der Form $\sum_{n=-r}^{\infty} a_n b^{-n}$
mit $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, $a_n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a_n \leq b-1$
 $\forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -r$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-r}^n a_k b^{-k} &\leq \sum_{k=-r}^n (b-1) b^{-k} = \\ \sum_{k=0}^{n+r} (b-1) b^{-(k-r)} &= (b-1) b^r \sum_{k=0}^{n+r} b^{-k} \\ &\leq (b-1) b^r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^k = (b-1) b^r \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

$$= (b-1)b^r \frac{b}{b-1} = b^{r+1} < +\infty$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Monotoniekriterium.

Zur Eindeutigkeit der Darstellung als b -adischer Bruch

Lemma (4.29)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \leq b-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt im Falle der Konvergenz die Abschätzung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n} \leq 1$, und Gleichheit genau dann, wenn $a_n = b-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Satz (4.30)

Seien $c, d \in \mathbb{R}$, $c, d \geq 0$ und $c = \sum_{n=-r}^{\infty} c_n b^{-n}$, $d = \sum_{n=-r}^{\infty} d_n b^{-n}$ Darstellungen dieser Zahlen als b -adische Brüche. Genau dann gilt $c = d$, wenn einer der folgenden drei Bedingungen für die b -adischen Brüche zutrifft:

- (i) Es gilt $c_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -r$
- (ii) Es gibt ein $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq -r$, so dass $c_n = d_n$ für alle $n < N$, $d_N = c_N + 1$ und $c_n = b-1$, $d_n = 0$ für alle $n > N$.
- (iii) Es gibt ein $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq -r$, so dass $c_n = d_n$ für alle $n < N$, $c_N = d_N + 1$ und $c_n = 0$, $d_n = b-1$ für alle $n > N$.