§ 3. Häufungspunkte und Cauchyfolgen

Definition (3.1)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ wird Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt.

Beispielsweise sind -1 und 1 Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$.

Definition (3.3)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ existiert, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Proposition (3.4)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Genau dann ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n b_n = a$ existiert.

Konvergenz beschränkter monotoner Folgen

Satz (3.6)

Jede beschränkte, monoton wachsende oder monoton fallende Folge reeller Zahlen konvergiert.

Definition von Limes superior und Limes inferior

Definition (3.7)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Man nennt

$$\begin{aligned} \limsup_n \, a_n &= \lim_{n\to\infty} \, \sup \, \{a_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\} \qquad \text{bzw.} \\ \liminf_n \, a_n &= \lim_{n\to\infty} \, \inf \, \{a_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\} \end{aligned}$$

den Limes superior bzw. Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern die Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren.

Charakterisierung als Häufungspunkte

Proposition (3.8)

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann existieren $\limsup_n a_n$ und $\liminf_n a_n$ in $\mathbb{R}$.

Satz (3.9)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist $\limsup_n a_n$ der größte und $\liminf_n a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge.

Beweis von Proposition 3.8

zeige nur die Existenz des Limes superior für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nach Def. gilt $\limsup_n a_n = \lim_{m\to\infty} \sup(A_m)$, wobei $A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $A_m \supseteq A_{m+1}$.
Daraus folgt $\sup(A_m) \geq \sup(A_{m+1})$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \leq a_n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \sup(A_m) \geq s \;\; \forall m \in \mathbb{N}$.
also: $(\sup(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Nach Satz 9.6 hat die Folge einen Grenzwert. $\square$

Beweis von Satz 3.9:

geg.: beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

zeigen nur: $a = \limsup_n a_n$ ist größter Häufungspunkt der Folge, also im Einzelnen (1) a ist Häufungspunkt

(2) Es gibt keinen größeren Häufungspunkt.

zu (1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $N \in \mathbb{N}$. reicht z.zg.: Es gibt ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$

$a = \lim_{m\to\infty} \sup(A_m)$ mit $A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$ $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$

so dass $|a - \sup(A_m)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ $\forall m \geq N_1$, o.B.d.A. $N_1 \geq N$

Sei $m \geq N_1$. $\sup(A_m) - \frac{1}{2}\varepsilon$ ist keine obere Schranke von A_m $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und $a_n > \sup(A_m) - \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow \sup(A_m) - \frac{1}{2}\varepsilon < a_n \leq \sup(A_m)$

und $a - \frac{1}{2}\varepsilon < \sup(A_m) < a + \frac{1}{2}\varepsilon$

einsetzen $\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \frac{1}{2}\varepsilon < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

<u>zu (2)</u> Ang., es gibt einen Häufungspunkt $b > a$.

Sei $\varepsilon = b - a \in \mathbb{R}^+$. Da b ein Häufungspunkt der Folge ist, gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ $\Rightarrow$

$a_n > b - \frac{1}{2}\varepsilon = b - \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

$= a + \frac{1}{2}\varepsilon$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_n \in A_m$ mit $a_n > a + \frac{1}{2}\varepsilon$ $\Rightarrow$

$$\sup(A_m) \geq a + \tfrac{1}{2}\varepsilon \longrightarrow \lightning$$

$$a = \limsup_n a_n = \lim_{m\to\infty} \sup(A_m) \geq a + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$\square$

Satz von Bolzano-Weierstrass

Folgerung (3.10)

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt einen Häufungspunkt.

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz (3.9).

Folgerung (3.11)

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

Beweis von Folgerung 3.11:

geg.: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt

„$\Longrightarrow$" folgt aus Satz 2.3 („Konvergente Folgen sind beschränkt") und Prop. 3.5 („Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist Häufungspunkt.")

„$\Longleftarrow$" Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existieren

$\limsup_n a_n = \lim_{m\to\infty} \sup(A_m)$ und (*)

$\liminf_n a_n = \lim_{m\to\infty} \inf(A_m)$ in $\mathbb{R}$

Dies sind beides Häufungspunkte der Folge.
Auf Grund der Voraussetzung stimmen sie überein
(*) wobei $A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$.
Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\inf(A_m) \leq a_m \leq \sup(A_m)$,
da jeweils $a_m \in A_m$. Da $(\inf(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ und
$(\sup(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren
konvergiert auch $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, und es gilt
$\lim_{m\to\infty} a_m = \limsup_m a_m = \liminf_m a_m$. $\square$

Definition der Cauchyfolgen

Definition (3.12)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt Cauchyfolge, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n, m \geq N \quad \text{gilt.}$$

Charakterisierung der Cauchyfolgen durch Intervalle

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches Intervall mit a als links- und b als rechtsseitiger Grenze, dann nennen wir $\ell(I) = b - a$ die Länge des Intervalls.

Proposition (3.13)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn eine Folge $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ endlicher abgeschlossener Intervalle $J_k \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $\ell(J_k) \leq 2^{-k}$ und $J_{k+1} \subseteq J_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei jedes J_k alle bis auf endlich viele Punkte der Folge enthält.

intuitive, aber etwas ungenaue, Formulierung:
„Die Folge kann nach Weglassen von endlichen vielen Folgengliedern in einem beliebig kleinem Intervall untergebracht werden.“

Konvergenz der Cauchyfolgen

Satz (3.14)

Die Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind genau die konvergenten Folgen.

Def: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} :$
$\forall m,n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Beweis von Satz 3.14:

geg. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, z.zg.:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge

„$\Rightarrow$" Vor $\Rightarrow$ $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

Konvergenz $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Seien $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \geq N$. $\Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$
$\leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$

„$\Leftarrow$" Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (als Cauchyfolge) beschränkt

Vor $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : |a_m - a_n| < 1$

insb. $|a_n - a_N| < 1 \ \forall n \geq N \Rightarrow a_n \in]a_N - 1, a_N + 1[\ \forall n \geq N$

Setzen wir $s = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N - 1|, |a_N + 1|\}$,

dann gilt $|a_n| \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$. ($\Rightarrow$ Beh.)

Beh. $\Rightarrow$ Existenz von $\liminf_n a_n$, $\limsup_n a_n$

Dies sind Häufungspunkte der Folge bereits bekannt;

Existiert nur ein Häufungspunkt, dann konvergiert die Folge.

zeige: Gibt es Häufungspunkte $a < b$ der Folge, dann kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge sein.

Sei $\varepsilon = b - a$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\varepsilon \ \forall m, n \geq N_1$, a Häufungspunkt $\Rightarrow \exists m \geq N_1$ mit $|a_m - a| < \frac{1}{3}\varepsilon$

b Häufungspunkt $\Rightarrow \exists n \geq N_1$ mit $|a_n - b| < \frac{1}{3}\varepsilon$

$n, m \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{3}\varepsilon$

$$\varepsilon = |b - a| = |b - a_n + a_n - a_m + a_m - a| \leq$$

$$|b - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

$$= \varepsilon \implies \varepsilon < \varepsilon \qquad \square$$

Anwendung: Existenz der Eulerschen Zahl

Proposition (3.15)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert dieser Folge als die Eulersche Zahl e.

Zum Beweis von Prop. 3.15:

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, setze $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $(\Rightarrow a_n \le b_n)$

Man kann nachrechnen (mit der Bernoullischen Ungl., siehe Skript), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 < a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le 4 = b_1$$

Dies zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge ist, die somit in $\mathbb{R}$ konvergiert

Ist I eine Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(I)$ die Menge der endlichen Teilmengen von I. Es handelt sich um die Vereinigung sämtlicher Mengen $\mathscr{P}_k(I)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Satz (4.1)

Sei I eine Menge und $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie natürlicher Zahlen mit Indexmenge I. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zuordnung

$$\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(I) \to \mathbb{N}_0 \quad , \quad J \mapsto \sum_{i \in J} a_i$$

mit den Eigenschaften $\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0$, $\sum_{i \in \{k\}} a_i = a_k$ für alle $k \in I$ und

$$\sum_{i \in J \cup K} a_i = \sum_{i \in J} a_j + \sum_{i \in K} a_k \qquad \text{für } J, K \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(I) \text{ mit } J \cap K = \varnothing.$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

Proposition (4.2)

(i) Seien $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ zwei Familien natürlicher Zahlen mit endlicher Indexmenge I, und sei $c \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $(a_i + b_i)_{i\in I}$ und $(ca_i)_{i\in I}$ ebenfalls Familien natürlicher Zahlen über I, und es gilt

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \quad \text{und} \quad \sum_{i\in I} ca_i = c\sum_{i\in I} a_i .$$

(ii) Sei J eine weitere endliche Menge und $\varphi : J \to I$ eine Bijektion. Dann ist $(c_j)_{j\in J}$ mit $c_j = a_{\varphi(j)}$ eine Familie natürlicher Zahlen mit Indexmenge J, und es gilt

$$\sum_{j\in J} c_j \quad = \quad \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)} \quad = \quad \sum_{i\in I} a_i .$$

Umparametrisierung von Summen

Die Gleichung in (ii) bezeichnet man als Umparametrisierung einer Summe.

Wichtiger Spezialfall:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r}$$

für $m, n, r \in \mathbb{N}_0$. (Hier ist $I = \{m, m+1, ..., n\}$,
$J = \{m+r, m+r+1, ..., n+r\}$ und $\varphi : J \to I$, $j \mapsto j - r$.)

Zum Beispiel gilt

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 \quad = \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \quad = \quad \sum_{i=6}^{9} (i-5)^2.$$

Produktzeichen

Wieder sei $(a_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen. Das Produktzeichen ist die eindeutig bestimmte Zuordnung

$$\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(I) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad , \quad J \mapsto \prod_{i\in J} a_i$$

mit den Eigenschaften

$$\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1 \quad , \quad \prod_{i\in\{k\}} a_i = a_k \quad \text{und} \quad \prod_{i\in J\cup K} a_i = \left(\prod_{i\in J} a_j\right)\left(\prod_{i\in K} a_k\right)$$

für $J, K \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(I)$.

Rechenregeln für das Produktzeichen

Für Familien $(a_i)_{i\in I}$ mit endlichem I gilt

$$\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right) \quad \text{und} \quad \prod_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \prod_{i\in I} a_i$$

wobei $\varphi : J \to I$ eine Bijektion bezeichnet. Darüber hinaus gilt für beliebiges $c \in \mathbb{N}$ und $n = |I|$ jeweils

$$\prod_{i\in I}(c a_i) = c^n \prod_{i\in I} a_i.$$

Darstellung der Fakultät und der Binomialkoeffizienten

Es gilt

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{\ell=n-k+1}^{n} \ell$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$.

Definition der Reihen

Definition (4.3)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann bezeichnet man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

als Reihe über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das Folgenglied s_n nennt man die n-te Partialsumme der Reihe.

Konvergente Reihen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge über $\mathbb{K}$, dann verwendet man für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen auch das Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definition (4.4)

Man sagt, die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Existiert kein solcher Grenzwert, dann spricht man von einer divergenten Reihe.

- Im Falle der Konvergenz verwendet man auch für den Grenzwert das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Wenn statt dessen ein uneigentlicher Grenzwert vorliegt, dann schreibt man auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oder} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

Beispiele für Grenzwerte von Reihen

Proposition (4.5)

Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Proposition (4.6)

Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$

(Diese Reihe ist unter dem Namen geometrische Reihe bekannt.)

Beweis von Prop 4.5:

Sei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{1}{6}, \; a_3 = \frac{1}{12}, \; \dots$

Partialsummen: $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,

$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ <u>Beh:</u> $s_n = \frac{n}{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis durch vollst. Ind.:

Ind. Anf. $n=1$: $s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

Ind.-Schritt $n \mapsto n+1$: $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$

Ind.-V. $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$

$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} =$

$\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$