Definition der Konvergenz

Definition (2.1)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Wir sagen, die Folge konvergiert gegen a und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Man sagt in diesem Fall, a ist ein Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnet die Folge als konvergent. Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, werden divergente Folgen genannt.

Definition der uneigentlichen Konvergenz

Definition (2.13)

Man sagt, eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$ und verwendet die Notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad ,$$

wenn für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > \kappa$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Ebenso schreiben wir $\lim_n a_n = -\infty$, wenn es für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -\kappa$ für alle $n \geq N$ gibt.

Beispiele zur uneigentlichen Konvergenz

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^n$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = -n$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist weder eigentlich noch uneigentlich konvergent.

Die Summe uneigentlich konvergenter Folgen

Proposition (2.14)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} b_n \quad = \quad +\infty.$$

Dann gilt auch $\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$.

Beweis von Proposition 9.14:

~~falsch~~ (0 Punkte) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

$= (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

geg: Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \; (*_1)$

und $\lim_{n\to\infty} b_n \overset{(*_2)}{=} +\infty$ z.zg: $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$

Sei $K \in \mathbb{R}^+$. $(*_1) \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : a_n > K$

$(*_2) \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : b_n > K$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\}$. Beh.: $\forall n \geq N : a_n + b_n > K$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. $n \geq N_1 \Rightarrow a_n > K$ $\quad n \geq N_2 \Rightarrow$

$b_n > K \Rightarrow a_n + b_n > K + K > K$ $\square$

Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz, Teil I

$+$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a - b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Bem: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, dann gibt es für das Konvergenzverhalten von $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viele Möglichkeiten, z.B.

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$ (ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = -\infty$ (iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 42$

zu (i) $a_n = -n$, $b_n = 2n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

zu (ii) $a_n = -2n$, $b_n = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$

zu (iii) $a_n = -n$, $b_n = n+42 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} 42 = 42$

Rechenregeln für uneigentliche Konvergenz, Teil II

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$a=0$	?	0	0	0	?
$a>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\lim a_n$	$-\infty$	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$+\infty$
$\lim a_n^{-1}$	0	a^{-1}	?	a^{-1}	0

Definition (3.1)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ wird Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt.

Beispielsweise sind -1 und 1 Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$.

Monotonie-Eigenschaften von Folgen reeller Zahlen

Definition (3.2)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist

(i) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$

(ii) streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$

(iii) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$

(iv) streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Häufungspunkte als Grenzwerte von Teilfolgen

Definition (3.3)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ existiert, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Proposition (3.4)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Genau dann ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n b_n = a$ existiert.

Proposition (3.5)

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{K}$, dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel zum Begriff der Teilfolge.

Die konstanten Folgen mit Wert 1 bzw. -1 sind beides Teilfolgen der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(i) Definiere in $\mathbb{N}$ die Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch $n_k = 2k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Setzt man nun $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$

$(2 < 4 < 6 < 8 < \dots)$

(iii) Definiere in $\mathbb{N}$ die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $n_k = 2k-1$ (ist streng mon. wachsend weil $n_1 = 1 < n_2 = 3 < n_3 = 5 < \ldots$)

Setzt man nun $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $b_k = a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$.

-1

$\in \mathbb{N}$

$\in \mathbb{N}$

man

dann

Beweis von Prop. 3.4:

geg.: Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$

<u>Beh.</u>: a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Longleftrightarrow$ Es gilt eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert a.

„$\Longleftarrow$" Vor. $\Rightarrow$ Es gilt eine streng mon. wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. (*)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. zzg.: Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. (*) $\Rightarrow$ $\exists K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \ \forall k \geq K$. Also ist $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq K\}$ eine Menge natürlicher

Zahlen mit der angeg. Eigenschaft.

„$\Rightarrow$" Definiere eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ rekursiv nach folgender Vorschrift:

(i) Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ beliebig.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$, ang. n_k ist bereits konstruiert. Weil a ein Häufungspunkt der Folge ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_k$ und $|a_n - a| < \frac{1}{k+1}$.
Setze $n_{k+1} := n$.

Nach Konstruktion ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng mon. wachsend. Beh.: $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ mit $K \geq 2$ und $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K$ gilt $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. $\square$

Beweis von Prop. 3.5

geg. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{K}$

z.zg. (i) a ist Häufungspunkt der Folge

(ii) Es gibt keinen weiteren Häufungspunkt.

zu (i) Die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ geg. durch $n_k = k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ liefert eine geg. a konvergente Teilfolge, da $a_{n_k} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also folgt die Aussage aus Prop. 3.4.

zu (ii) Ang., es gibt einen Häufungspkt. $b \in \mathbb{K}$ der Folge mit $b \neq a$. Sei $\varepsilon = |b-a|$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ $\forall n \geq N$. b Häufungspunkt $\rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $|a_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon = |b-a| = |b-a_n+a_n-a| \leq |b-a_n| + |a_n-a| <$$
$$\tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon \quad \lightning$$

$$\square$$

Konvergenz beschränkter monotoner Folgen

Satz (3.6)

Jede beschränkte, monoton wachsende oder monoton fallende Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis von Satz 3.6:

(nur für monoton wachsende Folgen)

geg: eine beschränkte, monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ (d.h. $a_n \le a_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$)

z.zg: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert

Betrachte die Teilmenge $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$.
Diese ist nichtleer und nach oben beschränkt auf Grund der Voraussetzungen. $\rightarrow$

$s=\sup A$ existiert in $\mathbb{R}$ (da $\mathbb{R}$ vollständig) $\rightarrow$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$ Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$.

s ist obere Schranke von A. $s-\varepsilon$ ist keine obere Schranke (weil s die kleinste obere Schranke ist) $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $s-\varepsilon < a_N \leq s$

Es gilt dann $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$, denn:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. wachsend

$\Rightarrow a_n \geq a_N \Rightarrow s-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq s < s+\varepsilon$

$\Rightarrow s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ $\square$

Definition von Limes superior und Limes inferior

Definition (3.7)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Man nennt

$$\begin{aligned} \limsup_n a_n &= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m \mid m\in\mathbb{N}, m\geq n\} \qquad \text{bzw.} \\ \liminf_n a_n &= \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m \mid m\in\mathbb{N}, m\geq n\} \end{aligned}$$

den Limes superior bzw. Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern die Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren.

ende
$, \forall n \in \mathbb{N})$
wert
$\} \subseteq \mathbb{R}.$
ränkt
ollständig)
zeine

Beispiele für lim sup und lim inf:

(1) $a_n = (-1)^n$ Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei

$A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$ Nach Def. gilt

dann $\limsup_n a_n = \lim_{m\to\infty} \sup(A_m)$

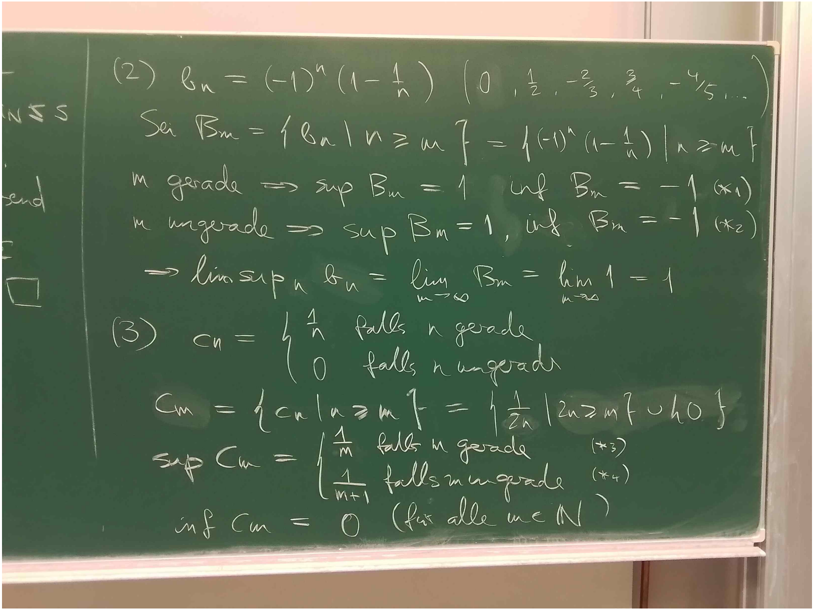
$\liminf_n a_n = \lim_{m\to\infty} \inf(A_m)$

$A_m = \{(-1)^n \mid n \geq m\} = \{-1, 1\}$

$\Rightarrow \sup A_m = 1, \ \inf A_m = -1$

$\Rightarrow \limsup_n a_n = \lim_{m\to\infty} 1 = 1$

$\liminf_n a_n = \lim_{m\to\infty} -1 = -1$



(Begründung von $(*_1)$ bis $(*_5)$ auf den letzten Seiten)

Offenbar gilt $\liminf_n c_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$,

und man kann zeigen$^{(*_5)}$, dass $\limsup_n c_n$ ebenfalls

gleich 0 ist.

Begründung von $(*_1)$ bis $(*_5)$

$(*_1)$,$(*_2)$ Es gilt $b_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, somit ist 1 eine obere Schranke von B_m. Es gibt aber keine obere Schranke $s < 1$, denn für ein solches s existiert eine gerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und $1 - \frac{1}{n} > s$, und diese Zahl ist in B_m enthalten. Damit ist $\sup(B_m) = 1$ nachgewiesen. Der Nachweis der übrigen drei Gleichungen läuft analog.

$(*_3)$ Ist m gerade, dann gilt $c_m = \frac{1}{m} \in B_m$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ ist $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}$, und somit auch $\frac{1}{m} \geq c$ für alle $c \in C_m$. Die Zahl c_m ist also das Maximum, und damit erst recht das Supremum von C_m.

$(*_4)$ Ist m ungerade, dann gilt $c_m = 0$ und $c_{m+1} = \frac{1}{m+1}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m+1$ gilt entweder $c_n = 0$ oder $c_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m+1}$, also auf jeden Fall $c_n \leq c_{m+1}$. Dies zeigt, dass c_{m+1} das Maximum und somit auch das Supremum von C_m ist.

Begründung von $(*_1)$ bis $(*_5)$

$(*_5)$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq M$ gilt $\frac{1}{m} < \varepsilon$ und $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$, wegen $\sup(C_m) \in \{\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}\}$ somit auf jeden Fall $|\sup(C_m) - 0| = \sup(C_m) < \varepsilon$. Damit ist $\lim_m \sup(C_m) = 0$ nachgewiesen.