

Definition der Konvergenz

Definition (2.1)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Wir sagen, die Folge **konvergiert gegen a** und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Man sagt in diesem Fall, a ist ein **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und bezeichnet die Folge als **konvergent**. Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, werden **divergente** Folgen genannt.

in Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon .$$

An Stelle von $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ verwenden wir auch die einfachere Schreibweise **$\lim_n a_n$** .

Proposition (2.4)

Sei $b \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Ist $|b| < 1$, dann gilt $\lim_n a_n = 0$.
- (ii) Für $b = 1$ gilt $\lim_n a_n = 1$.
- (iii) In den Fällen $b = -1$ und $|b| > 1$ ist die Folge divergent.

Proposition (2.5)

Ändert man bei einer Folge nur endlich viele Glieder ab, so ändert dies nichts am Konvergenzverhalten. Genauer: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ und $M \in \mathbb{N}$, so dass $a_n = b_n$ für alle $n \geq M$ erfüllt ist. Konvergiert nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{K}$, dann konvergiert $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Wert.

Satz (2.6)

Der Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, sofern er existiert, ist **eindeutig** bestimmt.

Beweis von Proposition 2.5

geg: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$

$$M \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = b_n \quad \forall n \geq M$$

Vor: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{(*)}{=} a$ für ein $a \in \mathbb{K}$

Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ Wegen $(*)$

existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$.

Sei $N = \max \{M, N_1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

$$\text{Dann gilt } |b_n - a| \stackrel{\substack{\uparrow n \geq M \\ \Rightarrow b_n = a_n}}{=} |a_n - a| \stackrel{\uparrow n \geq N_1}{< \varepsilon}$$

also: $\forall n \geq N: |b_n - a| < \varepsilon$

□

Beweis von Satz 26

geg. Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ Ang., es gibt $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq b$ und der Eigenschaft, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und b konvergiert.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}|b-a|$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow$

Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

Dann gilt $|b-a| = |b-a_n + a_n-a| \leq |b-a_n| + |a_n-a|$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b-a| \Rightarrow |b-a| < |b-a| \quad \nmid \quad \square$

$\begin{matrix} \text{[} n \geq N_2 \\ n \geq N_1 \end{matrix} \quad (|a_n - b| = |(-1)(b - a_n)| = |-1| |b - a_n| = |b - a_n|)$



Satz (2.7)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$, wobei $c_n = a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Gilt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{K} \quad ,$$

dann konvergiert auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und zwar gegen den Wert $a + b$.

Beweis von Satz 2.7

geg.: Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$

und $a, b \in \mathbb{K}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch

$c_n = a_n + b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Beh. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $[|c_n - (a+b)| < \varepsilon \iff$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \iff |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

$$< \varepsilon \iff |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \iff$$

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon]$$

Beweis von Satz 2.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\text{für alle } n \geq N_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{mit } |b_n - b| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (*) \quad \text{Sei } N = \max\{N_1, N_2\}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dann gilt

$$|a_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| +$$

$$|b_n - b| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

□

$$\begin{aligned} \uparrow n \geq N \Rightarrow \\ n \geq N_1 \text{ und } n \geq N_2 \end{aligned}$$

(*) für alle $n \geq N_2$

Be

D

ex

Sei

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

Sei N

$|a_n - b_n|$

$|a_n - b_n|$

$|a_n| |b_n|$

Satz (2.8)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ mit $c_n = a_n b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a bzw. $b \in \mathbb{K}$, dann konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und zwar gegen den Wert ab .

Beweis von Satz 2.8

geg. Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwerten
 $a, b \in \mathbb{K}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch $c_n = a_n b_n \forall n \in \mathbb{N}$

Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ab$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$[|c_n - ab| < \varepsilon \iff |a_n b_n - ab| < \varepsilon]$$

$$|a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| < \varepsilon \iff$$

$$|a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \stackrel{(*)}{<} \varepsilon \quad \text{Ist } K \in \mathbb{R}^+$$

mit $|b_n| < K$ und $|a| < K$, dann ist $(*)$ erfüllt,

$$\text{sobald } |a_n - a| < \frac{1}{2K} \varepsilon, |b_n - b| < \frac{1}{2K} \varepsilon$$

Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konvergente Folge beschränkt ist, existiert ein $K' \in \mathbb{R}^+$ mit $|b_n| \leq K' \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $K = \max\{K', |a|\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \frac{1}{2K} \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \frac{1}{2K} \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

$$|a_n b_n - a b| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - a b| \leq$$

$$|a_n b_n - a b_n| + |a b_n - a b| = |a_n - a| |b_n| +$$

$$|a| |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2K} K + K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

□

Folgerung (2.9)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. $b \in \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (i) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $c_n = \lambda a_n$ konvergiert gegen den Wert λa .
- (ii) Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = a_n - b_n$ konvergiert gegen den Wert $a - b$.

Satz (2.10)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{K}$, wobei $b \neq 0$ ist. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N_0$, und die Folge $(c_n)_{n \geq N_0}$ mit $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ konvergiert gegen den Wert $\frac{a}{b}$.

Beweis von Satz 2.10:

geg. Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{K}$,
wobei $b \neq 0$ vorausgesetzt wird

Beh. i) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N_0$

ii) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq N_0}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

zu i) Anwendung der Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$



auf $\varepsilon = \frac{1}{2}|b| \in \mathbb{R}^+$ liefert uns ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{1}{2}|b| \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \rightarrow |b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|$$
$$< \frac{1}{2}|b| + |b_n| \quad \forall n \geq N_0 \xRightarrow{+\frac{1}{2}|b|} \frac{1}{2}|b| < |b_n| \quad \forall n \geq N_0$$
$$\Rightarrow |b_n| > 0 \quad \forall n \geq N_0 \Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N_0$$

zu iii) Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{b}{b_n b} - \frac{b_n}{b_n b} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{|b_n b|} \cdot |b - b_n| < \varepsilon$$

$$\text{s.o.} \Rightarrow \text{für } n \geq N_0 \text{ gilt } \frac{1}{2}|b| < |b_n| \iff \frac{2}{|b|} > \frac{1}{|b_n|} \iff \frac{2}{|b|^2} > \frac{1}{|b_n b|}$$

$$\text{Wenn } |b - b_n| < \frac{1}{2}|b|^2 \varepsilon, \text{ dann ist } \frac{1}{|b_n b|} \cdot |b_n - b| < \varepsilon \quad]$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|^2 \varepsilon$

$\forall n \geq N_1$ Sei $N = \max\{N_0, N_1\}$ Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

$$\text{s.o.} \Rightarrow \frac{1}{2}|b| < |b_n| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \Rightarrow \frac{1}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b_n b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{1}{2}|b|^2 \varepsilon = \varepsilon \quad (\Rightarrow \text{Beh})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad \square$$

$\uparrow$ Grenzwert für Prod

Fehlerhafte Anwendung der Grenzwertsätze...

Anwendung: Bestimmung des Grenzwerts von
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = \frac{2n^2 + 5}{3n^2 - 7n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 - 7n + 3} \quad (*)$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 5)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 7n + 3)} = \frac{2 \cdot \infty}{3 \cdot \infty} = \frac{2}{3}$$

(*) ist keine zulässige Anwendung von
Satz 2.10, weil die Folgen in Zähler u. Nenner
 $(2n^2 + 5)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(3n^2 - 7n + 3)_{n \in \mathbb{N}}$ keine
konvergenten Folgen sind.

... und Korrektur

$$2 = \frac{2 \cdot \infty}{1 \cdot \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \quad \nabla$$

(Rechnen mit ∞ unzulässig)

richtig: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 - 7n + 3} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \quad (2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2 + 5 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2}{3 - 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{2 + 5 \cdot 0^2}{3 - 7 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2} = \frac{2}{3}$$

Satz (2.11)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $a \leq b$.

Hinweis zu Satz 2.11.

Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$, dann folgt im Allg. daraus nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (sondern nur " $\leq$ ").

Bsp.: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Satz (2.12)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen reeller Zahlen, und es gelte

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergieren die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und zwar gegen den Wert a .

Beweis von Satz 2.12:

Vor.: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \quad \text{für ein } a \in \mathbb{R}$$

Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$
$$\Rightarrow a_n > a - \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \quad \overset{b_n \geq a_n}{\Rightarrow} b_n > a - \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } |c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$
$$\Rightarrow c_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \quad \overset{b_n \leq c_n}{\Rightarrow} b_n < a + \varepsilon$$

Sei $N = \max \{N_1, N_2\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dann gilt $b_n > a - \varepsilon$ und $b_n < a + \varepsilon$, also

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon$$

also: $|b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

□

Definition der uneigentlichen Konvergenz

Definition (2.13)

Man sagt, eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert **uneigentlich** gegen $+\infty$ und verwendet die Notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad ,$$

wenn für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > \kappa$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Ebenso schreiben wir $\lim_n a_n = -\infty$, wenn es für jedes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -\kappa$ für alle $n \geq N$ gibt.

Beispiele zur uneigentlichen Konvergenz

- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^n$ konvergiert uneigentlich gegen $+\infty$.
- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = -n$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$.
- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist weder eigentlich noch uneigentlich konvergent.

Nachweis von $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$

Sei $K \in \mathbb{R}^+$ z.zg. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $-n < -K \quad \forall n \geq N$

Da N ist unbeschränkt ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > K$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dann gilt $n \geq N > K \Rightarrow$
 $-n < -K$.

Nachweis, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nicht unergerent -
lich gegen $+\infty$ konvergiert. Ang., das ist der Fall. Anwen-
dung der Annahme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ auf $K = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$
mit $a_n > 1 \quad \forall n \geq N \Rightarrow a_n > 1 \quad \nleftrightarrow$ da $a_n \in \{\pm 1\}$