Notation:

Im gesamten Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Erinnerung:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Dabei bezeichnet $a_n$ jeweils das Bild von $n$ unter der Abbildung, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

# Beispiele für Folgen

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(i)} & (a)_{n\in\mathbb{N}} & = & (a, a, a, a, \ldots),\ a \in \mathbb{K} & \textit{(konstante Folge)} \\
\text{(ii)} & (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} & = & (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) & \\
\text{(iii)} & (\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} & = & (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots) & \\
\text{(iv)} & (\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} & = & (\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \frac{6}{64}, \frac{7}{128}, \ldots) & \\
\text{(v)} & (b^n)_{n\in\mathbb{N}_0} & = & (1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots), \quad b \in \mathbb{C} &
\end{array}
$$

# Die Fibonacci-Folge

Durch die Definition $f_0 = f_1 = 1$ und die Rekursionsvorschrift $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für $n \geq 0$ erhält man die Fibonacci-Folge, deren erste Folgenglieder durch

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)$$

gegeben sind. Beispielsweise ist $f_2 = f_0 + f_1 = 1 + 1 = 2$, $f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 2 = 3$, $f_4 = f_2 + f_3 = 2 + 3 = 5$,...

# Vorbereitungen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, außerdem $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

(i) Die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ bedeutet, dass der Abstand zwischen dem Wert $a$ und dem Folgenglied $a_n$ kleiner als $\varepsilon$ ist.

(ii) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist dieser Abstand der Abstand der beiden komplexen Zahlen $a_n$ und $a$ in der Ebene.

(iii) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gleichbedeutend mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, wie in der Übung gezeigt wird

(iv) Sei nun $N \in \mathbb{N}$. Die Aussage „$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$" bedeutet, dass die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle Folgenglieder $a_n$ ab dem Index $N$ erfüllt ist.

# Definition der Konvergenz

**Definition (2.1)**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Wir sagen, die Folge konvergiert gegen $a$ und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad a \quad ,$$

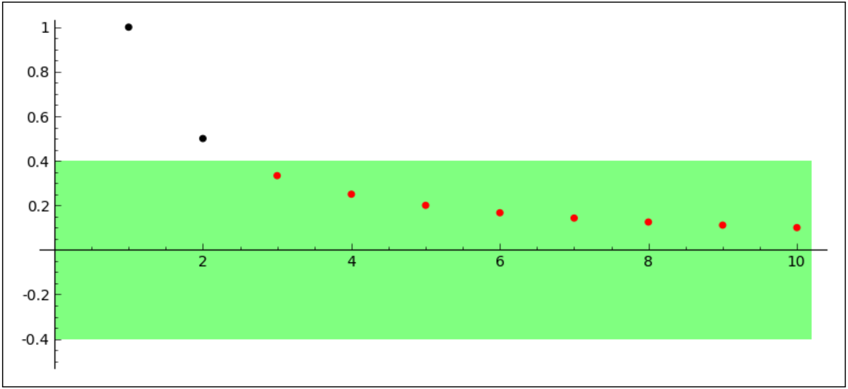
wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Man sagt in diesem Fall, $a$ ist ein Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bezeichnet die Folge als konvergent. Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, werden divergente Folgen genannt.

in Quantorenschreibweise:

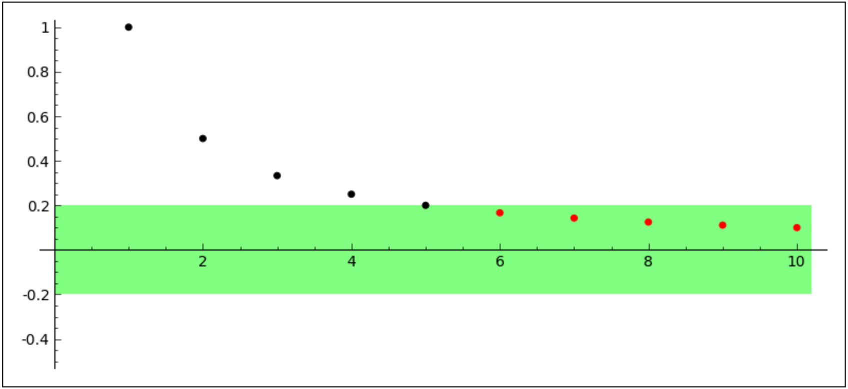
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

An Stelle von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ verwenden wir auch die einfachere Schreibweise $\lim_n a_n$.

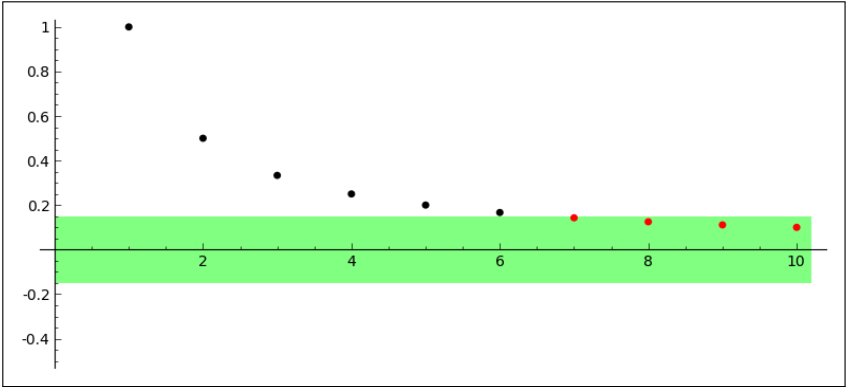
# Veranschaulichung der Konvergenz von Folgen



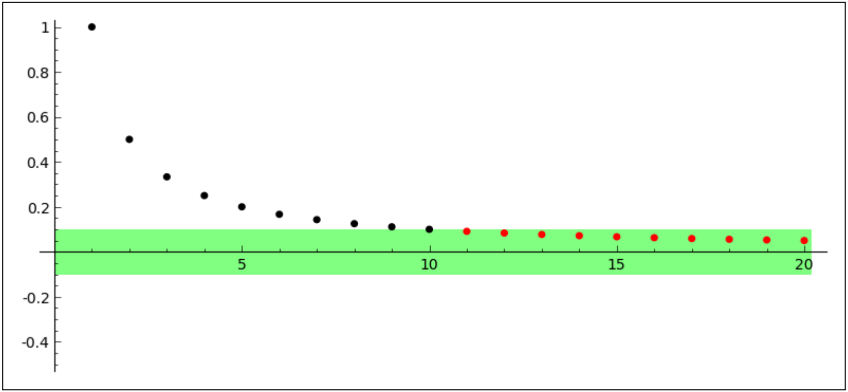
# Veranschaulichung der Konvergenz von Folgen



# Veranschaulichung der Konvergenz von Folgen



# Veranschaulichung der Konvergenz von Folgen



# Beispiele für konvergente und divergente Folgen

(i) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_n a_n = 0$.

(ii) Sei $a \in \mathbb{K}$. Für die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = a$ gilt $\lim_n a_n = a$.

(iii) Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_n a_n = 1$.

(iv) Für $a_n = \frac{n}{2^n}$ gilt $\lim_n a_n = 0$.

(v) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist divergent. (Es existiert also kein Grenzwert.)

Beispiele für Konvergenz

zu <u>(i)</u> $a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ z.z.: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

bedeutet: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\left[ |a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon^{-1} \right]$ Da die nat. Zahlen unbeschränkt sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{-1}$. <u>Beh</u>: $\forall n \geq N : |a_n - 0| < \varepsilon$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dann gilt $|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \underset{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} < \varepsilon$.

zu (ii) Sei $a \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$.

z.zg.: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\Big[ |a_n - a| < \varepsilon \iff |a-a| < \varepsilon \iff |0| < \varepsilon \iff 0 < \varepsilon \Big]$ Sei $N = 1$.

z.zg: $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dann gilt $|a_n - a| = |a-a| = 0 < \varepsilon$.

zu (iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = \frac{n}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

z.zg.: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\Big[ |a_n - 1| < \varepsilon \iff \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{(-1)}{n+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

Wegen $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ kann das $N$ aus Bsp. (i) verwendet werden $\Big]$

Da $\mathbb{N}$ unbeschr. ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{-1}$.

z.zg: $\forall n \geq N : |a_n - 1| < \varepsilon$ Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dann gilt $|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|$

$$= \left|\frac{(-1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \underset{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \varepsilon^{-1}}{<} \varepsilon .$$

zu (iv) Sei $a_n = \frac{n}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. zzg: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. [ $|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} < \varepsilon$ Überlegung: $2^n$ „wächst schneller als jede Polynomfkt. $\rightsquigarrow$ Es müsste ab einem Index $n$ jeweils $2^n \geq n^2$ gelten. $2^3 < 3^2$, aber $2^4 \geq 4^2$ | Beh.: $\forall n \geq 4: 2^n \geq n^2$.

Bew. durch vollst. Ind.

Ind.-Anf. $n = 4$: $2^4 = 16 = 4^2$

Ind.-Schritt $n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $2^n \geq n^2$ voraus. zzg.: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Nach Ind.-V. gilt $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$.

$\Rightarrow$

$\leq$

$\Sigma_n$

Es genügt also z.zg.: $2n^2 \geq (n+1)^2$

Es gilt die Äquivalenz $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff$
$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \iff n^2 \geq 2n + 1 \iff$
$n \geq 2 + \frac{1}{n}$ Diese Ungleichung ist für $n \geq 3$ erfüllt, somit auch $2n^2 \geq (n+1)^2$. ($\Rightarrow$ Beh.)

[Wegen $2^n \geq n^2 \ \forall n \geq 4$ reicht es also statt $\frac{n}{2^n} < \varepsilon$ die Ungl. $\frac{n}{n^2} < \varepsilon$ z.zg., was zu $\frac{1}{n} < \varepsilon$ äquivalent ist.] Da $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 > \varepsilon^{-1}$. Sei $N = \max\{4, N_0\}$ z.zg.: $\forall n \geq N: |a_n - 0| < \varepsilon$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dann gilt insb. $n \geq 4$

$$\Rightarrow |a_n - 0| = \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \underset{n \geq 4}{\leq} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\underset{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N \geq N_0}{\leq} \frac{1}{N_0} \underset{N_0 > \varepsilon^{-1}}{<} \varepsilon.$$

zu (v) Sei $a_n = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Beh. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, d.h. sie besitzt keinen Grenzwert.

Ang. $a \in \mathbb{R}$ ist ein Grenzwert der Folge, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (bedeutet: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$ $|a_n - a| < \varepsilon$) Wende die Konvergenzeigenschaft auf $\varepsilon = 1$ an. $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < 1$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade mit $n \geq N_1$. $|a_n - a| < 1 \Rightarrow$ $|(-1)^n - a| < 1 \underset{n \text{ gerade}}{\Rightarrow} |1 - a| < 1 \Rightarrow a \in \,]1-1, 1+1[$ $\Rightarrow a \in \,]0, 2[$

$|(-1)^n - a| < 1 \underset{n \text{ gerade}}{\Longrightarrow} |1-a| < 1 \Rightarrow a \in \,]1-1, 1+1[$

$\Rightarrow a \in \,]0,2[$

Sei $m \in \mathbb{N}$ ungerade mit $m \geq N_1$ $\Rightarrow |a_m - a| < 1$

$\Rightarrow |(-1)^m - a| < 1 \underset{m \text{ ungerade}}{\Longrightarrow} |(-1) - a| < 1 \Rightarrow a \in \,]-1-1, -1+1[$

$\Rightarrow a \in \,]-2,0[$ $\quad a \in \,]-2,0[$ und $a \in \,]0,2[$ $\overset{]-2,0[\,\cap\,]0,2[\,=\,\emptyset}{\Longrightarrow} a \in \emptyset$ ↯

Also war die Annahme falsch, der Grenzwert $a$ existiert nicht. $\square$

# Beschränktheit konvergenter Folgen

## Definition (2.2)

Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, wenn die Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt ist.

## Satz (2.3)

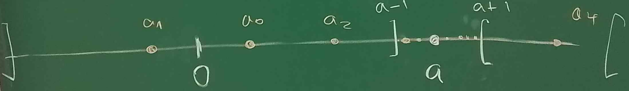
Jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.

wichtige Folgerung:
Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

Beweis von Satz 2.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, mit Grenzwert $a\in\mathbb{K}$. z.zg.:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. $\exists K\in\mathbb{R}^+$ mit $|a_n|\le K \;\forall n\in\mathbb{N}$.




Wende die Konvergenzbed. auf $\varepsilon = 1$ an $\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\ge N: |a_n - a| < 1$

Sei $K = \max\{|a|+1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$.

a

zu

Sei

bere

Sei

$= |e$

$\lfloor n \ge$

zu (ii)

konst

$\lim_{n\to\infty}$

Beh.: $|a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Fall: $n \leq N-1$. Dann gilt $|a_n| \leq K$, nach Def. von $K$ (da $\max\{|a|+1, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|\} \geq K$).

2. Fall: $n \geq N$. Dann gilt $|a_n - a| < 1$, nach Def. von $N$. $\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a|$
$\leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq K$. $\square$

# Folgen gegeben durch Potenzen

**Proposition (2.4)**

Sei $b \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ist $|b| < 1$, dann gilt $\lim_n a_n = 0$.

(ii) Für $b = 1$ gilt $\lim_n a_n = 1$.

(iii) In den Fällen $b = -1$ und $|b| > 1$ ist die Folge divergent.

Beweis von Prop. 2.4: Sei $b \in \mathbb{K}$ und $a_n = b^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

zu (i) Vor.: $|b| < 1$ z.zg.: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |b^n - 0| < \varepsilon$.

bereits bekannt: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N < \varepsilon$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. $|b^n - 0| = |b^n| = |b|^n$

$$= |b|^{n-N} \, |b|^N \leq 1 \cdot |b|^N = |b|^N < \varepsilon$$

$n \geq N$

$n \geq N \Rightarrow |b|^{n-N} \leq 1$ ← $a \in \mathbb{R}_+,\ a < 1 \Rightarrow a^n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

zu (ii) Im Fall $b = 1$ ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konstante Folge mit Wert 1. und somit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

zu (iii) Im Fall $b = -1$ wurde die Divergenz bereits bewiesen. Im Fall $|b| > 1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, denn: Ang. $\exists\, K \in \mathbb{R}^+$ mit $|a_n| \leq K \;\forall n \in \mathbb{N}$. bekannt: Wegen $|b| > 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b|^n > K$. $\Rightarrow |a_n| = |b^n| = |b|^n > K$ ↯

$\square$