

§ 1. Definition der Zahlbereiche

Definition (1.1)

Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $K^+ \subseteq K$ wird **Anordnung** von K genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $x = 0_K$, $x \in K^+$, $-x \in K^+$.
- (ii) Aus $x, y \in K^+$ folgt $x + y \in K^+$ und $xy \in K^+$.

Das Paar (K, K^+) bezeichnet man als **angeordneten Körper**. Ein Element $x \in K$ wird als **positiv** bezeichnet, wenn $x \in K^+$, und **negativ**, wenn $-x \in K^+$ gilt.

Für die spätere Verwendung definieren wir die Bezeichnungen

$$K_+ = K^+ \cup \{0_K\} \quad \text{und} \quad K^\times = K \setminus \{0_K\}.$$

Satz (1.3)

Sei (K, K^+) ein angeordneter Körper.

- (i) Durch $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K_+$ ist eine **Totalordnung** auf K definiert. Für alle $x, y \in K$ gilt $x < y \Leftrightarrow y - x \in K^+$.

Seien nun $x, y, a \in K$ vorgegeben.

- (ii) Es gilt $x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a$.
(iii) Ist a positiv, dann gilt $x \leq y \Leftrightarrow ax \leq ay$.
(iv) Ist a negativ, dann gilt $x \leq y \Leftrightarrow ax \geq ay$.

Die drei Aussagen (ii), (iii) und (iv) bleiben gültig, wenn man $\leq$ durch $<$ und $\geq$ durch $>$ ersetzt.

Archimedisch angeordnete Körper

Definition (1.9)

Die Anordnung K^+ auf K wird **archimedisch** genannt, wenn für beliebige $x, y \in K^+$ jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n_K x > y$ erfüllt ist. Man bezeichnet (K, K^+) in diesem Fall als **archimedisch angeordneten** Körper.



Satz (1.10)

Sei (K, K^+) ein archimedisch angeordneter Körper.

- (i) Für jedes $\varepsilon \in K^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_K^{-1} < \varepsilon$.
- (ii) Sei $x \in K$ mit $x \geq -1_K$. Dann gilt $(1_K + x)^n \geq 1_K + n_K x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies ist die sogenannte **Bernoullische Ungleichung**.
- (iii) Ist $b > 1_K$, dann existiert für jedes $\kappa \in K^+$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > \kappa$. (Die Potenz b^n wird „unendlich groß.“).
- (iv) Ist dagegen $0_K < b < 1_K$, so gibt es für jedes $\varepsilon \in K^+$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$. (Die Potenz wird „beliebig klein.“).

Beweis von Satz 1.10, nur (iii) und (iv)

zu (iii) geg. $b \in K$, $b > 1_K$ und $K \in K^+$ z.zg

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$

Sei $x = b - 1_K$ ($\Rightarrow x > 0_K \geq -1_K$) Auf Grund der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n x > K \Rightarrow 1_K + n x > K \xrightarrow{\text{Binomial}} (1_K + x)^n > K$
 $\Rightarrow b^n > K$
 $x = b - 1_K$

zu (iv) Sei $b \in K$ mit $0_K < b < 1_K$ und $\varepsilon \in K^+$

Sei $c = b^{-1}$ $b < 1_K, b \in K^+ \Rightarrow c > 1_K$ (iii)

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $c^n > \varepsilon^{-1} \Rightarrow b^n = (c^n)^{-1} < \varepsilon$ $\square$

Definition der Dedekindschen Schnitte

Definition (1.11)

Ein **Dedekindscher Schnitt** von K ist ein Paar (A, B) bestehend aus Teilmengen $A, B \subseteq K$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Es gilt $A, B \neq \emptyset$ und $A \cup B = K$.
- (ii) Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a < b$.
(Daraus folgt $A \cap B = \emptyset$.)

Ein Element $t \in K$ wird **Schnittzahl** von (A, B) genannt, wenn die Ungleichungen $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ erfüllt sind.



Beispiele zur Def. des Dedekindschen Schnitts

(i) $K = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 1]$, $B =]1, +\infty[$

Dieser Dedekindsche Schnitt (A, B) hat eine Schnittzahl, nämlich 1.

(ii) $K = \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 1[$, $B = [1, +\infty[$

(ebenfalls Schnittzahl 1)

(iii) $K = \mathbb{Q}$, $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \sqrt{2}\}$

Dann ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt, aber (A, B) hat keine Schnittzahl. (Beachte: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

denn: Ang., $t \in \mathbb{Q}$ ist Schnittzahl

1. Fall: $t < \sqrt{2}$ Da $\mathbb{Q}$ eine sog. dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist

existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a \in]t, \sqrt{2}[$
(wird später gezeigt) Dann gilt $a \in A$
und $a > t$. $\Downarrow$ zur Def. der Schnittzahl
2. Fall: $t > \sqrt{2}$ Wie oben begründet man,
dass $] \sqrt{2}, t[$ ein $b \in \mathbb{Q}$ enthält. Dann
ist $b \in B$ und $b < t$. $\Downarrow$ zur Schnittzahl.

Lemma (1.12)

Jeder Dedekindsche Schnitt von K besitzt höchstens eine Schnitzzahl.

Definition (1.13)

Ein angeordneter Körper K wird **vollständig** genannt, wenn **jeder** Dedekindsche Schnitt (A, B) von K eine Schnitzzahl besitzt.

Beweis von Lemma 1.12: Ang. (A, B) ist ein Dedekindscher Schnitt mit zwei Schnittzahlen t, t' , wobei $t < t'$.

1. Fall: $t' \in A$ Dann muss (da t Schnittzahl ist) $t' \leq t$ gelten. $\downarrow$

2. Fall: $t' \in B$ Sei $u = \frac{1}{2}(t + t')$. Dann gilt $t < u < t'$. t' Schnittzahl $\Rightarrow u \in A$
 t Schnittzahl $\Rightarrow u \in B$. Insgesamt gilt also $u \in A \cap B$ $\downarrow$ da $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Satz (1.14)

Für einen angeordneten Körper (K, K^+) sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) (K, K^+) ist vollständig.
- (ii) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subseteq K$ besitzt ein Supremum.
- (iii) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $M \subseteq K$ besitzt ein Infimum.

Beweis von Satz 1.14. nur „(i) $\Rightarrow$ (ii)“

geg: angeordneter Körper (K, K^+)

Uv: (K, K^+) ist vollständig, d.h. jeder
Dedekindsche Schnitt (A, B) besitzt eine
Schnittzahl

Sei $M \subseteq K$, $M \neq \emptyset$, nach oben be-
schränkt durch ein $s \in K$ (d.h. $s \geq x \forall x \in M$)

z.zg: M hat ein Supremum, also eine
kleinste obere Schranke

Sei $B = S^+(M)$ die der oberen Schranken von M , und $A = K \setminus B$

Beh. (A, B) ist Dedekindscher Schnitt

zul i) $A \cup B = K$ ist klar nach Def. von A

$\Rightarrow$ gilt $B \neq \emptyset$, da $s \in B$, Ang $A = \emptyset$

$\Rightarrow S^+(M) = B = K$ aber: $M \neq \emptyset \Rightarrow$

$\exists x \in M$ Wegen $x^{-1}K \leq x$ kann $x^{-1}K$ keine obere Schranke von M sein. $\Rightarrow x^{-1}K \notin B$ $\nmid$

zul ii) Sei $a \in A$ und $b \in B$. z.zg: $a < b$

Ang $a \geq b$. $b \geq x \forall x \in M \Rightarrow a \geq x \forall x \in M$

$\Rightarrow a \in S^+(M)$ $\nmid$ zu Def. von A

($\Rightarrow$ Beh.) Es gibt nach V_n eine Schnittzahl t von (A, B) . Beh.: t ist Supremum von M
zu überprüfen: (i) t ist obere Schranke von M
 (ii) Es gibt keine kleinere obere Schranke

zu (i) Ang. t ist keine obere Schranke. $\Rightarrow \exists x \in M$ mit $x > t$
Sei $u = \frac{1}{2}(t+x) \Rightarrow t < u < x$ t Schnittzahl $\Rightarrow$
 $u \in B \Rightarrow u \in S^+(M)$ $\nmid$ da $x > u$, $x \in M$

zu (ii) Ang. $t' < t$ ist ebenfalls obere Schranke von M .
Sei $u = \frac{1}{2}(t' + t) \Rightarrow t' < u < t$ t Schnittzahl
 $\Rightarrow u \in A$, d.h. u ist keine obere Schranke von M

$\Rightarrow \exists x \in M$ mit $x > u$. $\Rightarrow x > t'$ $\nmid$ zu t' obere Schranke.



Satz (1.15)

Ist (K, K^+) **vollständig**, dann sind alle Intervalle $\neq \emptyset$ in K von der Form $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ oder $[a, b]$ mit a, b wie in Proposition 1.7 festgelegt.

Die Intervallschachtelungseigenschaft

Definition (1.16)

Man sagt, der angeordnete Körper (K, K^+) besitzt die **Intervallschachtelungs-Eigenschaft**, wenn für jede Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtleerer, abgeschlossener, endlicher Intervalle, die

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt, die Schnittmenge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ **nicht leer** ist.

(Mit Hilfe der Zahl $\sqrt{2}$ ist leicht zu sehen, dass der Körper $\mathbb{Q}$ Intervallschachtelungs-Eigenschaft **nicht** besitzt.)

Satz (1.17)

Ein angeordneter Körper (K, K^+) ist genau dann **vollständig**, wenn er die Intervallschachtelungs-Eigenschaft besitzt **und** die Anordnung K^+ archimedisch ist.

Veranschaulichung der Intervallschachtelungseigenschaft



--- Schnittmenge der Intervalle

$I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4 \ \dots$

Nachweis, dass $\mathbb{Q}$ diese Eigenschaft nicht besitzt:

Definiere $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ folgendermaßen rekursiv:

- Wähle $a_1 \in \mathbb{Q}$ mit $a_1 \in]\sqrt{2}-1, \sqrt{2}[$, $b_1 \in]\sqrt{2}, \sqrt{2}+1[$
- Ang $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2}-1 < a_n < \sqrt{2} < b_n < \sqrt{2}+1$ sind bereits gewählt.
Wähle dann $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ mit $\max\{a_n, \sqrt{2}-\frac{1}{n+1}\} <$

$a_{n+1} < \sqrt{2}$ und $b_{n+1} \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2} < b_{n+1} < \min\{b_n, \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}\}$

- Setze $I_n = [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt die Folge der Intervalle I_n die Vsr. von Def. 1.16, aber es gibt kein Element im Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Beweisskizze Satz 1.17 „ $\Rightarrow$ “

- Zum Nachweis der Intervallschachtelungseigenschaft betrachtet man für eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Diese Menge ist nichtleer und nach oben beschränkt. Auf Grund der Vollständigkeit von K besitzt sie somit ein Supremum a .
- Wenn a **nicht** im Durchschnitt aller I_n liegt, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m < a$. Dieses b_m ist eine obere Schranke von A . Aber weil a die **kleinste** obere Schranke ist, gilt $b_m \geq a$, Widerspruch!

Beweisskizze Satz 1.17 „ $\Rightarrow$ “

- Nehmen wir nun an, es gibt $x, y \in K^+$, die die archimedische Eigenschaft nicht erfüllen. Dann folgt $n_K \leq \frac{x}{y}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Damit hat die Menge $N = \{n_K \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine obere Schranke, außerdem ist sie offenbar nichtleer. Sie muss also ein Supremum $s \in K$ besitzen. Aber $s - 1_K$ wäre dann **keine** obere Schranke von N . Daraus leitet man einen Widerspruch her.

Abschluss der Richtung " $\Rightarrow$ ":

$s - 1_k$ keine obere Schranke von $N \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
mit $n_k > s - 1_k \Rightarrow n_k + 1_k > s \nmid$ zu s obere
Schranke von N , da $n_k + 1_k = (n+1)_k \in N$

Beweisskizze Satz 1.17 „ $\Leftarrow$ “

- Hier werden die Intervallschachtelungseigenschaft und die archimedische Eigenschaft vorausgesetzt. Zu zeigen ist die Vollständigkeit von K . Sei $M \subseteq K$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Zu zeigen ist, dass diese ein Supremum besitzt.
- Sei $a \in M$ und $b \in \mathcal{S}^+(M)$ mit $a < b$. Man definiert nun **rekursiv** Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass jedes der b_n und keines der a_n eine obere Schranke von M ist. Außerdem wird die Folge so gewählt, dass stets $a_n < b_n$ erfüllt ist und sich der Abstand zwischen a_n und b_n in jedem Schritt **halbiert**.
- Die Intervallschachtelungseigenschaft liefert einen Punkt s im Schnitt sämtlicher Intervalle $[a_n, b_n]$. Man überprüft, dass dieses s ein Supremum von M sein muss, indem man die Annahmen, dass s keine bzw. nicht die kleinste obere Schranke ist, zu einem **Widerspruch** führt.

Überabzählbarkeit vollständiger Körper

Mit Hilfe des Intervallschachtelungs-Kriteriums kann eine weitere wichtige Eigenschaft vollständiger angeordneter Körper hergeleitet werden.

Satz (1.18)

Jeder vollständige, angeordnete Körper besitzt **überabzählbar** viele Elemente.

Beweisskizze Satz 1.18

- Nehmen wir an, dass K ein vollständiger, höchstens abzählbarer Körper ist. Dann gibt es eine injektive Abbildung $f : K \rightarrow \mathbb{N}$, und daraus kann die Existenz einer surjektiven Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow K$ abgeleitet werden.
- Mit Hilfe der Elemente $x_n = g(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) kann eine Folge immer kleinerer Intervalle gebildet werden, nach folgendem Schema: Man startet mit $x = x_1$ und wählt m minimal so, dass $x_m > x_1$ ist. (Auf Grund der Surjektivität von g muss es ein solches m geben.) Man betrachtet dann zunächst das Intervall $[x, y]$ mit $y = x_m$.
- Man geht nun die Werte $x_1, x_2, \dots$ der Reihe nach durch. Sobald ein x_k in $]x, y[$ liegt, verwendet man dieses Element, um das Intervall zu verkleinern (d.h. man ersetzt das Intervall durch $[x, x_k]$ oder durch $[x_k, y]$).

Beweisskizze Satz 1.18

- Diesen Prozess der Intervall-Verkleinerung wiederholt man nun unendlich oft.
- Auf Grund der Intervallschachtelungseigenschaft muss es einen Punkt z im Durchschnitt all dieser Intervalle geben. Auf Grund der Surjektivität von g gilt $z = x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Aber dieser Punkt hätte zu irgendeinem Zeitpunkt verwendet werden müssen, um das Intervall zu verkleinern. Dann könnte z aber nicht im Durchschnitt aller Intervalle liegen, Widerspruch!

Satz (1.19)

Es gibt vollständige, angeordnete Körper. Wir wählen einen solchen Körper willkürlich aus, bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$ und nennen ihn den Körper der **reellen Zahlen**.

Eigenschaften der reellen Zahlen

- (i) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, und jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum.
- (ii) Der Körper $\mathbb{R}$ besitzt die Intervallschachtelungs-Eigenschaft.
- (iii) Die Anordnung $\mathbb{R}^+$ ist archimedisch. Damit sind auch die unter Satz 1.10 formulierten Rechenregeln für $\mathbb{R}$ gültig.
- (iv) Der Körper $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Definition (1.20)

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird **induktiv** genannt, wenn $1 \in M$ gilt und für jedes $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ erfüllt ist.

Beispiele für induktive Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$ selbst, ebenso $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{R}^+$.

Definition (1.21)

Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ der **natürlichen Zahlen** ist definiert durch

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M = \{ n \in \mathbb{R} \mid n \in M \text{ für jede induktive Menge } M \subseteq \mathbb{R} \}.$$

Außerdem definieren wir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(Es ist leicht zu sehen, dass die Menge $\mathbb{N}$ selbst induktiv ist.)

Proposition (1.22)

- (i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $m + n \in \mathbb{N}$ und $mn \in \mathbb{N}$.
- (ii) Ist $m \in \mathbb{N}$, dann liegt $m - 1$ in $\mathbb{N}_0$.
- (iii) Alle natürlichen Zahlen sind positiv, d.h. es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.

Satz (1.23)

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllen die Peano-Axiome (P1) bis (P5).

Aus der archimedischen Eigenschaft folgt außerdem, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben **unbeschränkt** ist.