

Wiederholung: elementare Zeilenumformungen

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$. Unter einer **elementaren Zeilenumformung** von A verstehen wir

- Typ $M_{k,\lambda}$ (wobei $1 \leq k \leq m$, $\lambda \in K^\times$)
Multiplikation der k -ten Zeile von A mit dem Wert λ
- Typ $A_{k,\ell,\lambda}$ (wobei $1 \leq k, \ell \leq m$, $k \neq \ell$ und $\lambda \in K$)
Addition des λ -fachen der k -ten Zeile von A zur ℓ -ten
- Die **Vertauschung** zweier Zeilen ist **keine** elementare Zeilenumformung, kann aber durch eine endliche Folge solcher Umformungen realisiert werden.

Wiederholung: Elementarmatrizen

Jede elementare Zeilenumformung von A kann durch Multiplikation mit einer **Elementarmatrix** von links erreicht werden. Jede endliche Folge solcher Umformungen wird durch Multiplikation mit einem **endlichen Produkt** von Elementarmatrizen von links erreicht.

- bewirkt eine Zeilenumformung vom Typ $M_{k,\lambda}$

$$M_{k,\lambda} = \begin{pmatrix} E^{(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & E^{(m-k)} \end{pmatrix}$$

- bewirkt eine Zeilenumformung vom Typ $A_{k,\ell,\lambda}$, falls $k < \ell$

$$A_{k,\ell,\lambda} = \begin{pmatrix} E^{(k-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^{(\ell-k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^{(m-\ell)} \end{pmatrix}$$

- bewirkt eine Zeilenumformung vom Typ $A_{k,\ell,\lambda}$, falls $k > \ell$

$$A_{k,\ell,\lambda} = \begin{pmatrix} E^{(\ell-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & E^{(k-\ell-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^{(m-k)} \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Elementarmatrizen

Nachweis der Eigenschaft von $A_{k,\ell,\lambda}$ im Fall $k < \ell$

$$A_{k,\ell,\lambda} \cdot A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ z_k \\ C \\ z_\ell \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ z_k \\ C \\ \lambda z_k + z_\ell \\ D \end{pmatrix}$$

wobei A zusammengesetzt ist aus $B \in \mathcal{M}_{(k-1) \times n, K}$, der k -ten Zeile z_k von A , $C \in \mathcal{M}_{(\ell-k-1) \times n, K}$, der ℓ -ten Zeile z_ℓ von A und der Matrix $D \in \mathcal{M}_{(m-\ell) \times n, K}$.

Satz (7.12)

Jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf normierte ZSF gebracht werden. Eine äquivalente Formulierung dieser Aussage lautet: Es gibt ein Produkt $E \in \mathcal{M}_{m, K}$ von Elementarmatrizen, so dass EA in normierter ZSF vorliegt.

Beweis von Satz 7.12:

geg. $A \in M_{m \times n, K}$

(i) zeige durch vollständige Induktion über die Spaltenzahl n , dass A in endl. vielen Schritten in ZSF überführt werden kann

Ind.-Anf. $n=1$ (eine Spalte) folgt aus Lemma 7.11

Ind.-Schritt $n \mapsto n+1$: $A \in M_{m \times (n+1), K}$

1. Fall: erste Spalte von A ist null

$\Rightarrow A = (0 \ B)$ mit $B \in M_{m \times n, K}$

Ind. V. $\Rightarrow \exists$ Produkt von Elementarmatrizen E , so dass

EB in ZSF vorliegt (Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_r$)
 $EA = E(0 \ B) = (0 \ EB)$ ist Matrix in ZSF,
 mit Kennzahlen $r, j_1+1, \dots, j_r+1$

2. Fall. erste Spalte von $A \neq 0$

Schreibe A in Blockgestalt, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & z \\ s & C \end{pmatrix}$ mit
 $s \in M_{(m-1) \times 1, k}$, $z \in M_{1 \times n, k}$, $C \in M_{(m-1) \times n, k}$

Lemma 7.11 $\Rightarrow$ $\exists$ Produkt E von Elementarmatrizen mit
 $E \begin{pmatrix} a_{11} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow EA = \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ mit $z' \in M_{1 \times n, k}$ und
 $C' \in M_{(m-1) \times n, k}$

Ind -V. $\Rightarrow$ Es gibt ein Produkt E' von Elementarmatrizen,
 so dass $E' C'$ ZSF hat (Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_r$)
 überprüfe: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix}$ ist Produkt von Elementarmatrizen

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & E' C' \end{pmatrix} \text{ ist eine}$$

Matrix in ZSF, mit Kennzahlen

$$\begin{array}{ccccccc} r+1 & , & 1 & , & j_1+1 & , & \dots & , & j_t+1 \\ & & " & & " & & & & " \\ & & j_1' & & j_2' & & \dots & & j_{t+1}' \end{array}$$

(ii) Nachweis, dass eine Matrix A in ZSF mit Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_t$ in normierte ZSF überführt werden kann

- Multipliziere für $k=1, \dots, r$ die k -te Zeile von A mit a_{k,j_k}^{-1}

- Für $k=r, r-1, \dots, 1$ addiere jeweils das $(-a_{ijk})$ -fache der k -ten Zeile zur i -ten Zeile, für $1 \leq i < k$. (Die Einträge oberhalb von a_{kjk} werden zu null.) $\square$

A
 A_1
 A_1
 M_2

Beispiel: Betrachte das LGS

$$3x + 5y - 3z = -4$$

$$2x - 8y + 7z = 11$$

$$5x - 3y + 4z = 7$$

erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & -8 & 7 & 11 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,1,-1}} \begin{pmatrix} 1 & 13 & -10 & -15 \\ 2 & -8 & 7 & 11 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{1,2,-2}} \begin{pmatrix} 1 & 13 & -10 & -15 \\ 0 & -34 & 27 & 41 \\ 0 & -68 & 54 & 82 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,3,-2}} \begin{pmatrix} 1 & 13 & -10 & -15 \\ 0 & -34 & 27 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_{2,-\frac{1}{34}}} \begin{pmatrix} 1 & 13 & -10 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{27}{34} & -\frac{41}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,1,-13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{34} & \frac{23}{34} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{34} & -\frac{41}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte ZSF, Kennzahlen: $r=2$, $j_1=1$, $j_2=2$

Bestimmung der homogenen Lösungsmenge:

$$S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$$

Basisvektor $v_3 = \begin{pmatrix} -11/34 \\ 27/34 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 34 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}^{\text{hom}} = \left\{ \lambda v_3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 34 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Bestimmung eines speziellen Lsg.

letzte Spalte der umgeformten Matrix $\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 27/34 \\ -11/34 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungsmenge des Systems: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 27/34 \\ -11/34 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 34 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 23/34 \\ -1/34 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{34}\right) \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \\ 34 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen

Satz (7.13)

Lässt sich eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ durch endliche viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix A' in normierter ZSF mit Zeilenrang $r = n$ umwandeln, so ist A invertierbar.

Verfahren zur Berechnung von A^{-1} für eine invertierbare Matrix $A \in M_{\mathbb{R}, n}$.

- Schreibe neben A die Einheitsmatrix $E = E^{(n)}$.
- Forme A um auf normierte Zeilenstufenform. Wende dieselben Zeilenumformungen auf die Matrix rechts daneben an.

Ist die normierte ZSF vom Rang $r = n$, dann ist die umgeformte Matrix rechts gleich A^{-1} .

denn: Auf Grund des Verfahrens gibt es ein Produkt

Ist die normierte ZSF vom Rang $r = n$, dann
ist die umgekehrte Matrix rechts gleich A^{-1}

B von Elementarmatrizen, so dass $B A$ in normierter
Zeilenstufenform vorliegt. $r = n \Rightarrow B A = E^{(n)} = E$
 $\Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow B \cdot (A \ E) = (B A \ B E)$
 $= (E \ B) = (E \ A^{-1})$

Beispiel: Berechnung von A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 0 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{= A^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition der Spaltenumformungen

Definition

Eine **Spaltenumformung** ist eine der beiden folgenden Operationen.

- (i) die Multiplikation der k -ten Spalten einer Matrix mit einem Wert λ , wobei $\lambda \in K^\times$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ ist oder
- (ii) die Addition des λ -fachen der k -ten Spalte zur ℓ -ten, mit $\lambda \in K$ und $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq \ell$.

Lemma (7.14)

Die Multiplikationen einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ mit den Transponierten von Elementarmatrizen von rechts bewirken elementare Spaltenumformungen. Genauer gilt:

- (i) Die Matrix $A {}^tM_{k,\lambda}$ entsteht aus der Matrix A durch Multiplikation der **k -ten** Spalte mit λ .
- (ii) Die Matrix $A {}^tA_{k,\ell,\lambda}$ entsteht aus der Matrix A durch Addition des λ -fachen der k -ten Spalte zur ℓ -ten Spalte.

zu ii) Sei $a \in K^+$, z.z.g: $a^{-1} \in K$

zum Beweis von Lemma 7.14

zu ii) Sei $B = A {}^t M_{k,\lambda} \Rightarrow {}^t B = {}^t (A {}^t M_{k,\lambda})$
 $= M_{k,\lambda} {}^t A \Rightarrow {}^t B$ entsteht durch Multiplikation
der k -ten Zeile von ${}^t A$ mit λ
 $\Rightarrow B$ entsteht durch Mult. der k -ten Spalte von A mit λ ,
denn die k -te Spalte von A ist die k -te Zeile von ${}^t A$

Satz (7.15)

Für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ gibt es invertierbare Matrizen $T \in \text{GL}_m(K)$ und $U \in \text{GL}_n(K)$ und ein $r \in \{1, \dots, n\}$, so dass die Matrix TAU die **Blockgestalt**

$$\begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{besitzt.}$$

Satz (7.16)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n, K}$ eine Matrix, die durch elementare Zeilenumformungen auf normierte ZSF mit Zeilenrang $r < n$ gebracht werden kann. Dann ist A **nicht** invertierbar.

§ 1. Definition der Zahlbereiche

Definition (1.1)

Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $K^+ \subseteq K$ wird **Anordnung** von K genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $x = 0_K$, $x \in K^+$, $-x \in K^+$.
- (ii) Aus $x, y \in K^+$ folgt $x + y \in K^+$ und $xy \in K^+$.

Das Paar (K, K^+) bezeichnet man als **angeordneten Körper**. Ein Element $x \in K$ wird als **positiv** bezeichnet, wenn $x \in K^+$, und **negativ**, wenn $-x \in K^+$ gilt.

Für die spätere Verwendung definieren wir die Bezeichnungen

$$K_+ = K^+ \cup \{0_K\} \quad \text{und} \quad K^\times = K \setminus \{0_K\}.$$

Lemma (1.2)

Sei (K, K^+) ein angeordneter Körper.

- (i) Für alle $a \in K^\times$ gilt $a^2 \in K^+$.
- (ii) Aus $a \in K^+$ folgt jeweils $a^{-1} \in K^+$.

Beweis von Lemma 1.2:

zu i) Sei $a \in K^\times \Rightarrow a \in K^+$ oder $-a \in K^+$

1. Fall: $a \in K^+ \Rightarrow a^2 = a \cdot a \in K^+$ (da das Produkt von zwei positiven Elementen positiv ist)

2. Fall: $-a \in K^+ \Rightarrow (-a) \cdot (-a) \in K^+ \Rightarrow a \cdot a \in K^+ \Rightarrow a^2 \in K^+$

zu ii) Sei $a \in K^+$, z.z.g.: $a^{-1} \in K^+$

$a \in K^+ \Rightarrow a \in K^\times \Rightarrow a^{-1} \in K^\times \xrightarrow{ii)} (a^{-1})^2 \in K^+$

$\Rightarrow a^{-1} = a \cdot (a^{-1})^2 \in K^+$

□