

Definition (6.4)

Sei V ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird **Untervektorraum** von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) $0_V \in U$
- (ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$
- (iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

Beispiele für Untervektorräume

- (i) Ist V ein beliebiger K -Vektorraum, dann sind $\{0_V\}$ und V Untervektorräume von V .
- (ii) Für jedes $v \in V$ ist $\langle v \rangle_K = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ ein Untervektorraum. Im Fall $v \neq 0_V$ bezeichnet man ihn als **lineare Gerade**.
- (iii) Für beliebige v, w ist auch

$$\langle v, w \rangle_K = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$$

ein Untervektorraum. Ist $v \neq 0_V$ und $w \notin \langle v \rangle_K$, dann nennt man $\langle v, w \rangle_K$ eine **lineare Ebene**.

Definition (6.8)

Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ K -Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ heißt **K -lineare Abbildung** oder **Homomorphismus** von K -Vektorräumen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) $\phi(v +_V w) = \phi(v) +_W \phi(w)$ für alle $v, w \in V$
- (ii) $\phi(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W \phi(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$

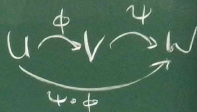
Häufig wird (etwas ungenau) statt von einer K -linearen auch einfach von einer **linearen Abbildung** gesprochen.

Proposition (6.12)

Seien U, V, W drei K -Vektorräume und $\phi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen.

- Dann ist $\psi \circ \phi$ eine lineare Abbildung von U nach W .
- Ist ϕ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung ϕ^{-1} eine lineare Abbildung von V nach U .

Beweis von Proposition 6.12



zu 1) geg. K -Vektorräume U, V, W

lineare Abbildungen $\phi: U \rightarrow V, \psi: V \rightarrow W$

z.zg. $\psi \circ \phi: U \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung

zu überprüfen: Für alle $u, u' \in U$ und $\lambda \in K$ gilt

$$(1) (\psi \circ \phi)(u +_U u') = (\psi \circ \phi)(u) +_W (\psi \circ \phi)(u')$$

$$(2) (\psi \circ \phi)(\lambda \cdot_U u) = \lambda \cdot_W (\psi \circ \phi)(u)$$

$$\begin{aligned} \text{zu (1)} \quad (\psi \circ \phi)(u +_U u') &= \psi(\phi(u +_U u')) \stackrel{\phi \text{ linear}}{=} \\ &\psi(\phi(u) +_V \phi(u')) \stackrel{\psi \text{ linear}}{=} \psi(\phi(u)) +_W (\psi(\phi(u'))) \end{aligned}$$

$$= (\psi \circ \phi)(u) +_W (\psi \circ \phi)(u')$$

$$\underline{\text{zu (2)}} \quad (\psi \circ \phi)(\lambda \circ_U u) = \psi(\phi(\lambda \circ_U u)) \stackrel{\phi \text{ linear}}{=} \psi(\lambda \circ_V \phi(u))$$

$$\stackrel{\psi \text{ linear}}{=} \lambda \circ_W \psi(\phi(u)) = \lambda \circ_W (\psi \circ \phi)(u)$$

zu (ii) geg. K -Vektorräume U, V , $\phi: U \rightarrow V$ bijektive lineare Abb. z.zg. $\phi^{-1}: V \rightarrow U$ ist linear, d.h. für alle $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$ gilt (1) $\phi^{-1}(v +_V v') = \phi^{-1}(v) +_U \phi^{-1}(v')$
(2) $\phi^{-1}(\lambda \circ_V v) = \lambda \circ_U \phi^{-1}(v)$

Seien $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$. Sei $u = \phi^{-1}(v)$, $u' = \phi^{-1}(v')$.

zu (1) Da u, u' in U liegen und ϕ linear ist, gilt $\phi^{-1} \rightarrow$
 $\phi(u +_U u') = \phi(u) +_V \phi(u') \Rightarrow \phi(u +_U u') = v +_V v' \xrightarrow{\phi^{-1}}$

$$u + u u' = \phi^{-1}(v + v v') \Rightarrow$$

$$\phi^{-1}(v) + u \phi^{-1}(v') = \phi^{-1}(v + v v')$$

zu (2) Aus der Linearität von ϕ folgt

$$\phi(\lambda \circ u u) = \lambda \circ v \phi(u) \Rightarrow$$

$$\phi(\lambda \circ u u) = \lambda \circ v v \xrightarrow{\phi^{-1}}$$

$$\lambda \circ u u = \phi^{-1}(\lambda \circ v v) \Rightarrow$$

$$\lambda \circ u \phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\lambda \circ v v)$$

□

Verschiedene Typen linearer Abbildungen

Definition (6.13)

Eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ heißt

- (i) **Monomorphismus** (von K -Vektorräumen), wenn ϕ injektiv ist,
- (ii) **Epimorphismus**, wenn ϕ surjektiv ist,
- (iii) **Isomorphismus**, wenn ϕ bijektiv ist.
- (iv) Eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ bezeichnet man als **Endomorphismus** von V .
- (v) Ein bijektiver Endomorphismus wird **Automorphismus** genannt.
- (vi) Zwei K -Vektorräume V, W bezeichnet man als **isomorph**, wenn ein Isomorphismus $\phi : V \rightarrow W$ existiert.

Beispiel: $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

(1) konkretes Beispiel für einen Automorphismus

$$\phi: V \rightarrow V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

leicht zu überprüfen: $\phi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, somit ist ϕ ist ihre eigene Umkehrabb., also bijektiv.

Linearität: Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y+v \\ x+u \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \quad \text{und}$$

$$\phi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

(2) Endomorphismus, der kein Auto -
morphismus ist

$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht injektiv, da $\psi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
obwohl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Linearität: Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \psi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right), \quad \psi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Die allgemeine lineare Gruppe eines Vektorraums

Folgerung (6.14)

Die Menge der Automorphismen eines K -Vektorraums V ist mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe. Man bezeichnet sie mit $GL(V)$ und nennt sie die **allgemeine lineare Gruppe** des Vektorraums V .

Definition (6.15)

Eine Abbildung $\psi : V \rightarrow W$ zwischen zwei K -Vektorräumen wird **affin-lineare** Abbildung genannt, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ und ein Vektor $w \in W$ existieren, so dass

$$\psi(v) = w + \phi(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

erfüllt ist. Eine bijektive affin-lineare Abbildung $\psi : V \rightarrow V$ wird **Affinität** von V genannt.

Beispiel für eine affin-lineare Abb.

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \text{ ist linear (s.o.)}$$

Daraus folgt, dass z.B. die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ geg. durch } \gamma\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+y \\ 5+x \end{pmatrix} \text{ affin-linear ist.} \end{aligned}$$

(Das ist sogar eine Affinität.)

Proposition (6.16)

Seien V, W K -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ferner seien $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervektorräume.

- Dann ist die Teilmenge $\phi(V') = \{\phi(v) \mid v \in V'\}$ von W ein Untervektorraum von W .
- Die Urbildmenge $\phi^{-1}(W') = \{v \in V \mid \phi(v) \in W'\}$ ist ein Untervektorraum von V .

Beispiel zu Prop. 6.16

Betrachte die lineare Abb. $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sei $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}$ leicht zu überprüfen:

U ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$

Laut Prop. 6.16 ist $\phi(U)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(Es ist $\phi(U) = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \times \{0\}$.)

Ebenso ist $\phi^{-1}(U)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(Es ist $\phi^{-1}(U) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \} = \{0\} \times \mathbb{R}$.)

Beweis von Prop. 6.16

geg. $\phi: V \rightarrow W$ lineare Abb. (V, W K -Vektorräume, K Krp)

V' Untervektorraum von V , W' Untervektorraum von W

Z.zg.: (1) $\phi(V')$ ist Untervektorraum von W
(2) $\phi^{-1}(W')$ ist Untervektorraum von V

zu (1) zu überprüfen (i) $0_W \in \phi(V')$

(ii) $\forall w_1, w_2 \in \phi(V'), \lambda \in K: w_1 + w_2 \in \phi(V'), \lambda w_1 \in \phi(V')$

zu (i) V' Untervektorraum von $V \Rightarrow 0_V \in V' \Rightarrow 0_W = \phi(0_V) \in \phi(V')$

zu (ii) Seien $w_1, w_2 \in \phi(V')$ und $\lambda \in K \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V'$ mit
 $\phi(v_1) = w_1, \phi(v_2) = w_2$ V' Untervektorraum, $v_1, v_2 \in V'$
 $\Rightarrow v_1 + v_2 \in V'$ und $\lambda v_1 \in V'$ Es gilt $w_1 + w_2 = \phi(v_1) + \phi(v_2)$

$$= \phi(v_1 + v_2) \in \phi(V'), \text{ da } v_1 + v_2 \in V'$$

$$\text{ebenso: } \lambda w_1 = \lambda \phi(v_1) = \phi(\lambda v_1) \in \phi(V'), \\ \text{da } \lambda v_1 \in V'$$

zu (2) zu überprüfen: (i) $0_V \in \phi^{-1}(W')$

$$\text{(ii) } \forall v_1, v_2 \in \phi^{-1}(W'), \lambda \in K: v_1 + v_2, \lambda v_1 \in \phi^{-1}(W')$$

zu (i) z.z. $\phi(0_V) \in W'$. Da ϕ linear ist, gilt $\phi(0_V) = 0_W$, und weil W' ein Untervektorraum von W ist, gilt $0_W \in W'$.

zu (ii) Seien $v_1, v_2 \in \phi^{-1}(W') \Rightarrow \phi(v_1) \in W'$ und $\phi(v_2) \in W'$. $\xrightarrow{W' \text{ ist Untervektorraum}}$ $\phi(v_1) + \phi(v_2) \in W'$ Sei

$$\phi \text{ linear} \quad \phi(v_1 + v_2) \in W' \Rightarrow v_1 + v_2 \in \phi^{-1}(W')$$

$$\phi(v_1) \in W', W' \text{ ist Untervektorraum} \Rightarrow \lambda \phi(v_1) \in W' \quad \phi \text{ linear} \quad \phi(\lambda v_1) \in W' \Rightarrow \lambda v_1 \in \phi^{-1}(W')$$

□

Definition (6.17)

Seien V, W zwei K -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

- (i) $\ker(\phi) = \phi^{-1}(\{0_W\}) = \{ v \in V \mid \phi(v) = 0_W \}$ den **Kern** und
- (ii) $\operatorname{im}(\phi) = \phi(V) = \{ \phi(v) \mid v \in V \}$ das **Bild** von ϕ .

Nach Prop. 6.16 ist $\ker(\phi)$ ein Untervektorraum von V und $\operatorname{im}(\phi)$ ein Untervektorraum von W .

Proposition (6.18)

Seien V, W K -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- (i) Die Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{im}(\phi) = W$ gilt.
- (ii) Sie ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\phi) = \{0_V\}$ erfüllt ist.

Beweis von Prop. 6.18 (ii)

geg: $\phi: V \rightarrow W$ lineare Abb.

Beh: ϕ injektiv $\iff \ker(\phi) = \{0_V\}$

" $\implies$ " Vor: ϕ injektiv z.zg: $\ker(\phi) = \{0_V\}$

" $\supseteq$ " gilt, weil $\ker(\phi)$ Untervektorraum von V ist

" $\subseteq$ " Sei $v \in \ker(\phi)$. Es gilt $\phi(v) = 0_W = \phi(0_V)$

ϕ injektiv $\implies v = 0_V \implies v \in \{0_V\}$

" $\impliedby$ " Vor: $\ker(\phi) = \{0_V\}$ z.zg: ϕ ist injektiv

Seien $v, v' \in V$ mit $\phi(v) = \phi(v')$ z.zg. $v = v'$

$$\phi(v) = \phi(v') \Rightarrow \phi(v) - \phi(v') = 0_W \Rightarrow \phi \text{ linear}$$

$$\phi(v - v') = 0_W \Rightarrow v - v' \in \ker(\phi) \Rightarrow \ker(\phi) = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow v - v' = 0_V \Rightarrow v = v'$$



Definition der linearen Gleichungssysteme (LGS)

Definition (6.19)

Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein **lineares Gleichungssystem** über K bestehend aus m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ ist ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ ist. Gilt $b_i = 0$ für $1 \leq i \leq m$, dann spricht man von einem **homogenen**, ansonsten von einem **inhomogenen** LGS.

Definition (6.20)

- Die Matrix $A = (a_{ij})_{m \times n, K}$ in Definition 6.19 wird **Koeffizientenmatrix** des LGS genannt.
- Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times (n+1), K}$ gegeben durch $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ und $\tilde{a}_{i, n+1} = b_i$ für $1 \leq i \leq m$ heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix**.
- Bezeichnet x die $n \times 1$ -Matrix mit den Einträgen $x_1, \dots, x_n$, dann kann das lineare Gleichungssystem in der Form **$Ax = b$** dargestellt werden.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$