

Definition (5.13)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei R ein Ring. Eine $m \times n$ - Matrix über R ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow R.$$

Dabei nennt man $A(i, j)$ den Eintrag von A an der Stelle (i, j) . Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen über R wird mit $\mathcal{M}_{m \times n, R}$ bezeichnet.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$ eine Matrix. Man nennt

- $a_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in R^n$ die i -te Zeile und
- $a_{\bullet j} = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in R^m$ die j -te Spalte von A .

Für jeden Ring R und beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\delta_{mn} = \delta_{mn,R} = \begin{cases} 1_R & \text{falls } m = n \\ 0_R & \text{falls } m \neq n. \end{cases}$$

Wichtige Beispiele für Matrizen

Folgende Matrizen spielen in der Linearen Algebra eine besonders wichtige Rolle:

- (i) die **Nullmatrix** $0^{(m \times n)}$ in $\mathcal{M}_{m \times n, R}$, deren sämtliche Einträge gleich 0_R sind und
- (ii) die **Einheitsmatrix** $E = E^{(n)}$ in $\mathcal{M}_{n, R}$ mit den Einträgen δ_{ij} für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$
- (iii) die **Basismatrizen** $B_{k\ell} = B_{k\ell}^{(m \times n)}$ mit den Einträgen $b_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

Das Summenzeichen

Sei R ein Ring, $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \dots, a_n \in R$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad \text{eine Kurzschreibweise f\u00fcr} \quad a_1 + \dots + a_n.$$

- Der Wert der Summe ist unabh\u00e4ngig vom verwendeten **Laufindex**. Beispielsweise ist $\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$.
- Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix in $\mathcal{M}_{m \times n, R}$.
Dann ist f\u00fcr $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq \ell \leq n$ jeweils

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} = a_{k1} + \dots + a_{kn}$$

und

$$\sum_{i=1}^m a_{i\ell} = a_{1\ell} + \dots + a_{m\ell}.$$

- Der erste Gleichung gibt die Summe \u00fcber $a_{k\bullet}$,
die zweite die Summe \u00fcber $a_{\bullet\ell}$ an.

Rechenoperationen auf Matrizen

(i) **Summe** Seien $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$.

Dann sind die Einträge von $C = A + B$ gegeben durch $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

(ii) **skalare Vielfache** Sei $A \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$ und $\lambda \in R$.

Dann sind die Einträge von λA gegeben durch λa_{ij} .

(iii) **Produkt** Seien $A \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$ und $B \in \mathcal{M}_{n \times r, R}$.

Dann sind die Einträge von $C = AB \in \mathcal{M}_{m \times r, R}$ gegeben durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

(iv) **Transposition** Sei $A \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$.

Dann ist ${}^t A \in \mathcal{M}_{n \times m, R}$, und der Eintrag von ${}^t A$ an der Stelle (i, j) ist a_{ji} .

Beispiele für Rechnungen mit Matrizen:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ nicht definiert}$$

$$(ii) 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Konvention: $A - B$ ist eine andere Schreibweise
für $A + (-1)B$. Sind $A, B \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$
und $C = A + (-1)B = A - B$, dann gilt

$$c_{ij} = a_{ij} + (-1)b_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \text{ for } 1 \leq i \leq m \\ \text{and } 1 \leq j \leq n.$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ -19 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \\ -15 & -21 & -27 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad {}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Die additive Gruppe der Matrizen

Proposition (5.14)

Sei R ein Ring, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann bildet die Menge $\mathcal{M}_{m \times n, R}$ mit der Addition von Matrizen eine **abelsche Gruppe**. Dabei ist $0^{(m \times n)}$ das Neutralelement, und für jedes $A \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$ ist $(-1_R)A$ das Inverse von A . Dieses Inverse wird das **Negative** von A genannt und mit $-A$ bezeichnet.

Beweis von Prop 5.14

geg: $m, n \in \mathbb{N}$, Ring R

Beh: $(M_{m \times n}, R, +)$ ist abelsche Grp.
zu überprüfen:

i) Kommutativ- und Assoziativgesetz

ii) $0 = 0^{(m \times n)}$ ist Neutralelement

iii) Für jedes A ist $-A = (-1_R) \cdot A$
das Inverse von A .

zu i) Seien $A, B \in M_{m \times n}, R$. Sei
 $C = A + B, D = B + A$.

z.zg.: $C = D$ Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ Dann gilt $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
 $= b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$.

↑ da $+$ im Ring R kommutativ ist

Seien $A, B, C \in M_{m \times n}(R)$ z.zg.:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

Sei $D = A+B$, $F = B+C$,

$G = D+C$ und $H = A+F$.

z.zg. $G = H$ Für $1 \leq i \leq m$ und

$1 \leq j \leq n$ gilt $g_{ij} = d_{ij} + c_{ij} =$

$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \stackrel{\text{ASS-Gesetz in } (R,+)}{=} a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) =$

a_{ij}

zu (i)

und

Für

$a_{ij} +$

$M_{m \times n}$

$= A$

zu (ii)

$A+B$

gilt b_{ij}

$D = A +$

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij} = h_{ij}$$

zu (ii) Sei $A \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$. Sei $D = A + 0$

und $F = 0 + A$. z.zg. $D = A$ und $F = A$

Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt $d_{ij} =$
 $a_{ij} + 0_{\mathbb{R}} = a_{ij} \Rightarrow D = A$, und da $+$ auf
 $M_{m \times n, \mathbb{R}}$ kommutativ ist, folgt $F = 0 + A$
 $= A + 0 = A$. $- \sqrt{= (-1_{\mathbb{R}}) A}$

zu (iii) Sei $A \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$ und $B = -A$. z.zg.:

$A + B = 0$ und $B + A = 0$. Für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$
gilt $b_{ij} = (-1_{\mathbb{R}}) a_{ij} = -a_{ij}$. Die Einträge von
 $D = A + B$ sind somit geg. durch

$$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0_{\mathbb{R}} \text{ f\"ur}$$

$$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \Rightarrow A + B = D = 0, \text{ und mit der}$$

Kommutativit\"at von $+$ auf $M_{m \times n, \mathbb{R}}$ erhalten wir

$$B + A = A + B = 0.$$



Proposition (5.15)

Sei R ein Ring, und seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. Weiter seien $A, A' \in \mathcal{M}_{m \times n, R}$, $B, B' \in \mathcal{M}_{n \times r, R}$ und $C \in \mathcal{M}_{r \times s, R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln.

- (i) $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$
- (ii) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
- (iii) $E^{(m)}A = AE^{(n)} = A$
- (iv) $(AB)C = A(BC)$
- (v) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

Beweis von Prop. 5.15 (teilweise)

zu ii) Seien $A \in M_{m \times n, R}$, $B, B' \in M_{n \times r, R}$

$$\text{z.zg.: } A(B+B') = AB + AB'$$

Sei $C = B+B'$, $D = AC$, $F = AB$, $G = AB'$

und $H = F+G$ z.zg.: $D = H$

Sei $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, r\}$

$$d_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ki} c_{il} \quad \text{Für } 1 \leq i \leq n \text{ gilt}$$

$$c_{il} = b_{il} + b'_{il} \Rightarrow d_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ki} (b_{il} + b'_{il})$$

$$\begin{aligned} \text{ebenso: } h_{kl} &= p_{kl} + q_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{il} + \sum_{i=1}^n a_{ki} b'_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ki} (b_{il} + b'_{il}) \Rightarrow h_{kl} = d_{kl} \end{aligned}$$

zu (iii) Sei $A \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$ und $C = E^{(m)} A$

z.zg: $C = A$ Sei $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^m \delta_{ki} a_{il} = \delta_{kk} a_{kl} = a_{kl}$$

$\uparrow$
 $\delta_{ki} = 1$ falls $i=k$
 $\delta_{ki} = 0$ falls $i \neq k$

zu (iv) Seien $A \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$, $B \in M_{n \times r, \mathbb{R}}$, $C \in M_{r \times s, \mathbb{R}}$

z.zg: $(AB)C = A(BC) \in M_{m \times s, \mathbb{R}}$

Sei $D = AB$, $F = D \cdot C$, $G = BC$, $H = AG$

z.zg: $F = H$ Sei $k \in \{1, \dots, m\}$ und

$l \in \{1, \dots, s\}$ z.zg: $f_{kl} = h_{kl}$

Für $1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq r$ gilt

$$d_{pq} = \sum_{i=1}^n a_{pi} b_{iq}, \text{ erhalte}$$

$$f_{kl} = \sum_{j=1}^r d_{kj} c_{jl} = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} \right) c_{jl}$$

Für $1 \leq p \leq n$ und $1 \leq q \leq s$ gilt

$$g_{pq} = \sum_{j=1}^r b_{pj} c_{jq}, \text{ erhalte}$$

$$\begin{aligned}
 h_{kl} &= \sum_{i=1}^n a_{ki} g_{il} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \left(\sum_{j=1}^r b_{ij} c_{jl} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r a_{ki} b_{ij} c_{jl} = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} c_{jl} \\
 &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} \right) c_{jl} \Rightarrow h_{kl} = f_{kl}
 \end{aligned}$$

Die Menge der Matrizen als Monoid

Folgerung (5.16)

Sei R ein Ring, und seien $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet die Menge $\mathcal{M}_{n,R}$ bildet mit der Multiplikation von Matrizen ein **Monoid**, mit $E^{(n)}$ als Neutralelement.

Es handelt sich dabei aber in der Regel **nicht** um ein kommutatives Monoid, da zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0_R \\ 1_R & 1_R \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix}$$

falls $n = 2$ und $0_R \neq 1_R$.

Die allgemeine lineare Gruppe

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,R}$ wird **invertierbar** genannt, wenn eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,R}$ mit $AB = BA = E^{(n)}$ existiert.

Folgerung (5.17)

Die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K bildet mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe. Man nennt sie die **allgemeine lineare Gruppe** und bezeichnet sie mit $GL_n(K)$.