# Mächtigkeit von Mengen, Unendlichkeit

Im Folgenden bezeichnet $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis $n$. Außerdem setzen wir $M_0 = \varnothing$.

**Definition (4.9)**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man sagt, eine Menge $A$ besteht aus $n$ Elementen oder hat die Mächtigkeit $n$, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : M_n \to A$ existiert. Wir schreiben dann $|A| = n$.

**Definition (4.10)**

Eine Menge $A$ ist endlich, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|A| = n$ existiert. Ansonsten bezeichnen wir die Menge $A$ als unendlich.

# Rechenregeln für Mächtigkeiten

**Satz (4.15)**

(i) Sind $A$ und $B$ endliche disjunkte Mengen, ist also $A \cap B = \varnothing$, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(ii) Ist $B$ endlich und $A \subseteq B$, dann gilt $|A| \leq |B|$ und $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

(iii) Sind $A$ und $B$ beliebige endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(iv) Für jede endliche Menge $A$ gilt $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ist $A$ eine endliche Menge, dann ist also $\mathscr{P}(A)$ und jede Teilmenge von $A$ endlich.

# Definition der Binomialkoeffizienten

**Definition (4.16)**

Für jede Menge $B$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathscr{P}_k(B)$ jeweils die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $B$, also

$$\mathscr{P}_k(B) \quad = \quad \left\{ A \in \mathscr{P}(B) \;\middle|\; |A| = k \right\}.$$

Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{n}{k} = |\mathscr{P}_k(M_n)|$ und bezeichnen diese Zahl als den Binomialkoeffizienten von $n$ über $k$.

Einige Binomialkoeffizienten lassen sich direkt angeben.

- $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$
- $\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k > n$

# Eine Formel für die Binomialkoeffizienten

**Proposition (4.17)**

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$, wobei $k \geq 1$ ist. Dann gilt

$$\binom{n+1}{k} \quad = \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad .$$

Die Fakultätsfunktion ist definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zum Beispiel ist

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

**Satz (4.18)**

Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad .$$

Beweis von Prop. 4.17

z.zg: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$

$\binom{n+1}{k} = |\mathcal{P}_k(M_{n+1})|$ $\leftarrow$ k-elementige Teilm. von $M_{n+1} = \{1, 2, \dots, n+1\}$

Betrachte in $\mathcal{P}_k(M_{n+1})$ die beiden Teilmengen

$$S = \{A \in \mathcal{P}_k(M_{n+1}) \mid n+1 \notin A\} = \mathcal{P}_k(M_n)$$

$$T = \{A \in \mathcal{P}_k(M_{n+1}) \mid n+1 \in A\}$$

Da $\mathcal{P}_k(M_{n+1}) = S \cup T$ und $S \cap T = \emptyset$

$$\Rightarrow \binom{n+1}{k} = |\mathcal{P}_k(M_{n+1})| = |S| + |T| = \binom{n}{k} + |T|$$

Betrachte die Abb. $T \to \mathcal{P}_{k-1}(M_n)$, $A \mapsto A \setminus \{n+1\}$.

Diese ist offenbar bijektiv, mit $\mathcal{P}_{k-1}(M_n) \to T$, $A \mapsto A \cup \{n+1\}$. $\Rightarrow |T| = |\mathcal{P}_{k-1}(M_n)| = \binom{n}{k-1}$

einsetzen $\to \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\square$

Beweis von Satz 4.18:

z.zg: $\forall n \in \mathbb{N} : \left( \forall k \in \{0, \dots, n\} : \quad = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$

Ind.-Anf.: z.zg.: $\forall k \in \{0\} : \binom{0}{k} = \frac{0!}{k!(0-k)!}$

also: $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!}$

Diese Gleichung ist erfüllt, denn beide Seiten sind gleich 1.

Ind.-Schritt: Setze die Aussage für $n$ voraus. z.zg.: $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

für $0 \leq k \leq n+1$

Fall $k=0$ $\binom{n+1}{0} = 1 = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1)!}$

Fall $k=n+1$ $\binom{n+1}{n+1} = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}$

Fall $k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\binom{n+1}{k} \overset{4.17}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{Ind.V.}}{=}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} =$$

$$\frac{n!}{k\cdot(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)}$$

$$\frac{n!\,(n-k+1)}{k\,(k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)} + \frac{n!\cdot k}{k\,(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\cdot k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \qquad \square$$

$-k+1)!$

# Das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

Jeder Binomialkoeffizient, der nicht am linken oder rechten Rand des Dreiecks liegt, ist die Summe der beiden über im stehenden Binomialkoeffizienten.

# Gleichmächtigkeit beliebiger Mengen

**Definition (4.19)**

Wir bezeichnen zwei Mengen $A$ und $B$ als gleichmächtig (oder als Mengen mit gleicher Mächtigkeit) und schreiben $|A| = |B|$, wenn eine Bijektion $\phi : A \to B$ existiert.

Wegen Proposition 4.13 ist dies konsistent mit der entsprechenden Beziehung zwischen endlichen Mengen.

# Definition der abzählbaren Unendlichkeit

**Definition (4.20)**

- Eine Menge $A$ wird abzählbar unendlich genannt, wenn sie die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt.
- Eine Menge, die endlich oder abzählbar unendlich ist, nennen wir höchstens abzählbar.
- Eine Menge, die nicht höchstens abzählbar ist, bezeichnet man als überabzählbar.

# Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen

**Proposition (4.21)**

Abzählbar unendliche Mengen sind unendlich.

Grund: Angenommen, eine Menge $A$ ist abzählbar unendlich und zugleich endlich. Dann gibt es Bijektionen $M_n \to A$ und $\mathbb{N} \to A$. Damit kann eine Abbildung $M_{n+1} \to M_{n+1}$ konstruiert werden, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, was im Widerspruch zu Proposition 4.12 steht.

# Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen (Forts.)

**Lemma (4.22)**

Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

Skizze:

- Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge.
- Man kann rekursiv eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ konstruieren, indem man in jedem Schritt $\varphi(n+1)$ als das kleinste Element in $A \setminus \varphi(M_n)$ definiert.
- Nun zeigt man, dass $\varphi$ auch surjektiv ist. Falls nicht, gibt es in $A \setminus \varphi(\mathbb{N})$ ein kleinstes Element $a$.
- Seien $a_1 < ... < a_r \in A$ die Elemente, die kleiner als $A$ sind. Dann gibt es ein $n_r \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n_r) = a_r$. Aber nach Konstruktion muss dann $\varphi(n_r + 1) = a$ gelten. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $a \notin \varphi(\mathbb{N})$.

**Proposition (4.23)**

(i) Teilmengen höchstens abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar.

(ii) Sind $A, B$ Mengen, ist $A$ höchstens abzählbar und $\phi : A \to B$ eine surjektive Abbildung, dann ist auch $B$ höchstens abzählbar.

Beweis:

zu (i) Es genügt zu zeigen, dass jede unendliche Teilmenge $M$ einer abzählbar unendlichen Menge $N$ abzählbar unendlich ist. Nach Definition der abzählbaren Unendlichkeit existiert eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to N$. Sei $A = \phi^{-1}(M)$. Nach Lemma 4.22 ist $A$ abzählbar unendlich. Weil $\phi|_A : A \to N$ bijektiv ist, gilt dasselbe für $A$.

**Proposition (4.23)**

(i) Teilmengen höchstens abzählbarer Mengen sind höchstens abzählbar.

(ii) Sind $A, B$ Mengen, ist $A$ höchstens abzählbar und $\phi : A \to B$ eine surjektive Abbildung, dann ist auch $B$ höchstens abzählbar.

Beweis:

zu (ii) Nach Satz 4.8 existiert eine Abbildung $\psi : B \to A$ mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$, und diese ist injektiv. Nach Teil (i) ist $\psi(B) \subseteq A$ höchstens abzählbar. Weil $\psi$ als Abbildung $B \to \psi(B)$ bijektiv ist, ist auch $B$ höchstens abzählbar.

Sprechweise:

Seien $I$ und $A$ Mengen. Eine Abbildung $\varphi : I \to A$ nennt man auch eine Familie von Elementen der Mengen $A$ und verwendet für diese dann die Schreibweise $(a_i)_{i \in I}$. Für das Element $\varphi(i)$ wird dann jeweils die Notation $a_i$ verwendet, und man bezeichnet $i$ als den Index (so etwas wie ein „Label“) des Elements $a_i \in A$.

**Satz (4.24)**

(i) Sind $A$ und $B$ abzählbar unendliche Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar unendlich.

(ii) Ist $I$ höchstens abzählbar, und ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie bestehend aus lauter höchstens abzählbaren Mengen $A_i$, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

# Zum Beweis von Satz 4.24 (i)

Der wichtigste Beweisschritt besteht in dem Nachweis, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. Tatsächlich kann die Elemente dieser Menge durchnummerieren, indem man die Paare $(m, n)$ nach folgendem Schema durchgeht.

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,1)_1 & (1,2)_3 & (1,3)_6 & (1,4)_{10} & (1,5)_{15} \\
(2,1)_2 & (2,2)_5 & (2,3)_9 & (2,4)_{14} & \\
(3,1)_4 & (3,2)_8 & (3,3)_{13} & & \\
(4,1)_7 & (4,2)_{12} & & & \\
(5,1)_{11} & & & &
\end{array}
$$

Formal läuft es darauf hinaus nachzuweisen, dass die folgende Nummerierungsfunktion bijektiv ist:

$$\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto n + \tfrac{1}{2}(m + n - 2)(m + n - 1)$$

# Zum Beweis von Satz 4.24 (ii)

- Weil die Menge $I$ höchstens abzählbar ist, existiert eine injektive Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{N}$.
- Auf Grund der Injektivität gibt es nach Satz 4.8 (i) eine Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to I$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Diese ist nach Satz 4.8 (ii) surjektiv.
- Dasselbe Argument liefert uns für jedes $i \in I$ auch eine surjektive Abbildung $\varphi_i : \mathbb{N} \to A_i$.
- Man zeigt nun, dass $\phi : \mathbb{N}^2 \to \bigcup_{i \in I} A_i$, $(m, n) \mapsto \varphi_{\psi(m)}(n)$ eine surjektive Abbildung ist.
- Nach Proposition 4.23 ist deshalb mit $\mathbb{N}^2$ auch die Menge $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar.

**Definition (5.1)**

Eine Verknüpfung auf einer Menge $A$ ist eine Abbildung $A \times A \to A$.

- Beispiele für Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ sind die Addition, die Subtraktion oder die Multiplikation.
- Man unterscheidet bei Verknüpfungen zwischen multiplikativer und additiver Schreibeweise. Additive („plusartige“) Verknüpfungssymbole sind $+$, $\oplus$ oder $\boxplus$. Multiplikative Verknüpfungssymbole sind $\cdot$, $\odot$ oder $*$.

# Eigenschaften von Verknüpfungen

**Definition (5.2)**

Eine Verknüpfung $\cdot$ auf einer Menge $A$ bezeichnet man als

(i) kommutativ, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in A$

(ii) assoziativ, wenn $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt ist.

Man bezeichnet eine Teilmenge $B \subseteq A$ als abgeschlossen unter der Verknüpfung $\cdot$, wenn für alle $b, b' \in B$ jeweils $bb' \in B$ gilt. Man erhält in diesem Fall eine Verknüpfung $\cdot_B$ auf $B$, indem man $b \cdot_B b' = bb'$ für alle $b, b' \in B$ setzt.

**Bem.** Die Subtraktion $(-)$ ist keine assoziative Verknüpfung auf $\mathbb{R}$, denn:

$$(1-1)-1 = 0-1 = -1$$
$$1-(1-1) = 1-0 = 1$$
$$\Rightarrow (1-1)-1 \neq 1-(1-1)$$

**Bsp.** Betrachte die Addition $(+)$ auf $\mathbb{R}$.

Beispiele für bzgl. $+$ abgeschlossene Teilmengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\{0\}$ aber nicht $\{1\}$

Frage: $\{0, 1, -1\}$ abgeschlossen bzgl. $+$ ? Nein!

aber: Die Menge ist abgeschlossen unter $\cdot$