Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) reflexiv, falls xRx für alle $x \in R$,

(ii) symmetrisch, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in R$,

(iii) anti-symmetrisch, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in R$,

(iv) transitiv, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in R$ gilt.

Definition (3.10)

Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X wird Äquivalenzrelation genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

(i) $X =$ Menge der Schüler einer Schule
$x \sim y \;\Leftrightarrow\;$ „x geht in dieselbe Klasse wie y"

(ii) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \;\Leftrightarrow\; a$ hat dieselbe Parität wie b
(d.h. a, b sind entweder beide gerade oder ungerade)

(iii) A endliche Menge, $X = \mathscr{P}(A)$, $P \sim Q \;\Leftrightarrow\; |P| = |Q|$
(wobei $|P|$ die Elementezahl von P bezeichnet)

Notation: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$m \mid n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} : n = km \;\Leftrightarrow\; \text{„}m \text{ ist Teiler von } n\text{“}$$

Definition (3.11)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Relation $\equiv_n$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch die Festlegung

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a - b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}.$$

Die Relation $\equiv_n$ wird als Kongruenzrelation modulo n bezeichnet. Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_n b$ werden auch kongruent modulo n genannt.

Die Kongruenzrelation als Äquivalenzrelation

Satz (3.12)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Zerlegungen einer Menge

Definition (3.13)

Als Zerlegung einer Menge X bezeichnen wir eine Teilmenge $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{P}(X)$ mit den Eigenschaften

(i) $A \neq \varnothing$ für alle $A \in \mathscr{Z}$

(ii) Für jedes $x \in X$ existiert ein $A \in \mathscr{Z}$ mit $x \in A$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathscr{Z}$ folgt aus $A \cap B \neq \varnothing$ jeweils $A = B$.

Die Äquivalenzklasse eines Elements

Definition (3.14)

Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann nennt man die Teilmenge

$$[x]_\sim \quad = \quad \{y \in X \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse des Elements x bezüglich $\sim$.

Proposition (3.15)

Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für alle $x, y \in X$ folgt aus $y \in [x]_\sim$ stets $[x]_\sim = [y]_\sim$. Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bilden also eine Zerlegung der Menge X.

Die Äquivalenzrelation geg. durch eine Zerlegung

Proposition (3.16)

Sei X eine Menge und $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von X. Dann ist durch die Festlegung

$$x \sim_{\mathscr{Z}} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathscr{Z} : (x \in A) \wedge (y \in A) \quad \forall\, x, y \in X$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Beweis von Prop. 3.16

geg. Menge X, Zerlegung $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\quad$ $\forall x, y \in X$

z.zg. Durch $x \sim_Z y \iff \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (y \in A)$

ist auf X eine Äquivalenzrelation definiert

zu überprüfen: $\sim_Z$ ist (i) reflexiv (ii) symmetrisch
(iii) transitiv

<u>zu (i)</u> Sei $x \in X$. Z Zerlegung von $X \Rightarrow \exists A \in Z$ mit

$x \in A \Rightarrow \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (x \in A)$

$\Rightarrow x \sim_Z x$

zu (ii) Seien $x, y \in X$ mit $x \sim_Z y$. z.zg.: $y \sim_Z x$

$$x \sim_Z y \underset{\text{von } \sim_Z}{\overset{\text{Definition}}{\Longrightarrow}} \exists A \in Z : (x \in A) \wedge (y \in A)$$

$$\Rightarrow \exists A \in Z : (y \in A) \wedge (x \in A) \Rightarrow y \sim_Z x$$

zu (iii) Seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim_Z y$ und $y \sim_Z z$.

z.zg.: $x \sim_Z z$ Aus den beiden Voraussetzungen folgt

$\exists A, B \in Z$ mit $x \in A$, $y \in A$, $y \in B$, $z \in B$

$$\Rightarrow y \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \overset{Z \text{ Zerlegung}}{\Longrightarrow} A = B$$

Aus $x \in A$, $z \in B$ und $A = B$ folgt $(x \in A) \wedge (z \in A)$

also: $\exists A \in Z : (x \in A) \wedge (z \in A) \Rightarrow x \sim_Z z$ $\square$

Definition der Kongruenzklassen

Proposition (3.17)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Äquivalenzklasse $[a]_n$ von a bezüglich der Relation $\equiv_n$ gegeben durch die Menge

$$a + n\mathbb{Z} \quad = \quad \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Man nennt $[a]_n$ auch die Kongruenz- oder Restklasse der Zahl a modulo n.

Übereinstimmung von Kongruenzklassen

Wenden wir Proposition (3.15) auf die Relation $\equiv_n$ an, so erhalten wir

Folgerung (3.18)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt die Äquivalenz

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad b \in a + n\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}.$$

Beispiel: In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt

$$... = -8 + 5\mathbb{Z} = -3 + 5\mathbb{Z} = 2 + 5\mathbb{Z} = 7 + 5\mathbb{Z} = ...$$

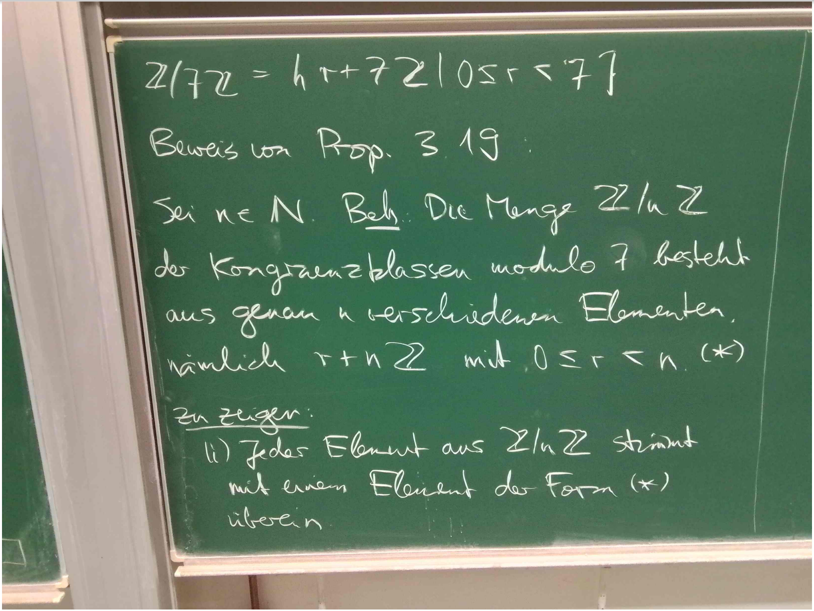
Die Menge der Kongruenzklassen

Proposition (3.19)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Kongruenzklassen modulo n. Dann besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau n verschiedene Elemente, nämlich $r + n\mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < n$.

Statt mit $[a]_n$ oder $a + n\mathbb{Z}$ bezeichnet man die Restklasse von a auch mit $\bar{a}$, sofern n aus dem Kontext heraus bekannt ist. Nach Proposition (3.19) ist die Menge $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ beispielsweise gegeben durch

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad = \quad \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}.$$



Korrektur:

In der vierten Zeile muss es heißen „Kongruenzklassen modulo n“

(ii) Die Elemente der Form (*) sind alle verschieden d.h. aus $r + n\mathbb{Z} = s + n\mathbb{Z}$ mit $0 \leq r \leq s < n$ folgt $r = s$.

zu (i) Jedes Element aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat die Form $a + n\mathbb{Z}$ mit $a \in \mathbb{Z}$

bekannt: Die Zahl a kann durch n mit Rest geteilt werden d.h. $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = qn + r$ und $0 \leq r < n$. $\Rightarrow a - r = (qn + r) - r = qn$ ist durch n teilbar $\Rightarrow a \equiv_n r \overset{(3.18)}{\Longrightarrow} a + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$.

zu (ii) Seien $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r + n\mathbb{Z} = s + n\mathbb{Z}$

und $0 \leq r \leq s < n$. z.zg.: $r = s$

$r + n\mathbb{Z} = s + n\mathbb{Z} \overset{3.18}{\Longrightarrow} r \equiv_n s \Longrightarrow$

$s - r$ ist teilbar durch n, d.h. $\exists q \in \mathbb{Z}$ mit

$s - r = qn$. $0 \leq r \leq s < n \Longrightarrow 0 \leq s - r < n$

$s - r = qn$ und $0 \leq s - r < n \Longrightarrow q = 0$

und $s - r = 0 \Longrightarrow r = s$ $\square$

Definition (4.1)

Seien X, Y Mengen. Eine Relation f zwischen X und Y wird Abbildung genannt, wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert. In Formelschreibweise:

(i) $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f$

(ii) $\forall x \in X : \forall y, y' \in Y : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Dabei nennt man X den Definitions- und Y den Wertebereich der Abbildung.

Notation:

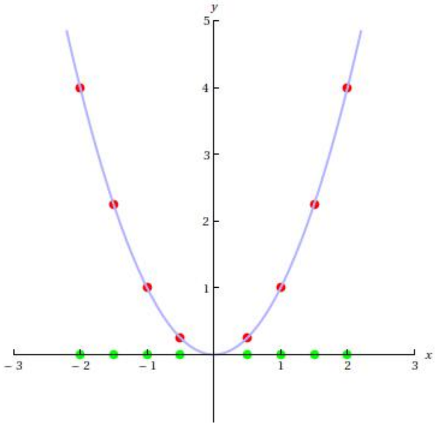
(i) Der Ausdruck $f: X \to Y$ ist eine Kurzschreibweise für die Aussage „f ist Abbildung mit Def.-bereich X und Wertebereich Y."

(ii) Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$, dann wird das eindeutig bestimmte $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ mit $\underline{f(x)}$ bezeichnet.

(iii) Häufig verwendet man das Symbol „$\mapsto$" zur Angabe von Abbildungen. Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist gleichbedeutend mit $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Beispiel für eine Abbildung

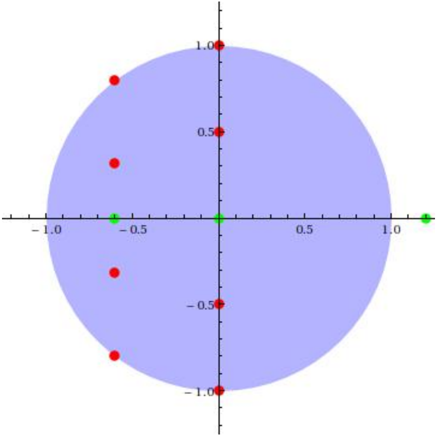
Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



(Über jedem grünen Punkt auf der x-Achse befindet sich genau ein roter Punkt. Jedem x-Wert wird ein eindeutig bestimmter y-Wert zugeordnet.)

Ein Gegenbeispiel

Die Menge $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist keine Abbildung $X \to \mathbb{R}$, egal von welchem Definitionsbereich X mit $[0, 1] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ man ausgeht.



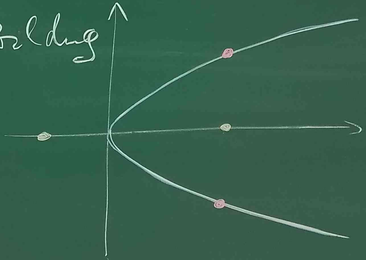
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

weiteres Gegenbeispiel:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$$

ist keine Abbildung

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Einschränkung von Abbildungen

Proposition (4.2)

Sind X, Y Mengen, $f \subseteq X \times Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$. Dann ist durch

$$f|_U = \{(x, y) \in f \mid x \in U\} = f \cap (U \times Y)$$

eine Abbildung von U nach Y definiert. Wir bezeichnen sie als die Einschränkung von f auf die Teilmenge U.

(Hier wird also lediglich der Definitionsbereich der Abbildung verkleinert.)

Komposition von Abbildungen

Proposition (4.3)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann ist

$$g \circ f = \{\, (x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g \}$$

eine Abbildung von X nach Z, und es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$. Man nennt $g \circ f$ die Komposition der Abbildungen f und g.

Beispiel: Wir betrachten die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1 \text{ und } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

Dann sind die Abbildungen $g \circ f$ und $f \circ g$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2 \text{ und } (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Beweis von Prop. 4.3

geg.: Abbildungen $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

<u>Beh.</u>: $g \circ f = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y$ mit $((x,y) \in f) \wedge ((y,z) \in g)\}$ ist eine Abbildung.

Sei $x \in X$. zu überprüfen ist:

(i) $\exists z \in Z: (x,z) \in g \circ f$

(ii) $\forall z, z' \in Z: (x,z) \in g \circ f \wedge (x,z') \in g \circ f \Rightarrow z = z'$

S

Au

Bil

f(x

(nach

lieg

zu (i) f Abbildung $X \to Y \Rightarrow \exists\, y \in Y$ mit $(x,y) \in f$

g Abbildung $Y \to Z \Rightarrow \exists\, z \in Z$ mit $(y,z) \in g$

damit gezeigt: $\exists\, y \in Y$ mit $(x,y) \in f \wedge (y,z) \in g$

$\to (x,z) \in g \circ f$ also insb. $\exists\, z \in Z : (x,z) \in g \circ f$

zu (ii) Seien $z, z' \in Z$ mit $(x,z) \in g \circ f$ und $(x,z') \in g \circ f$ zu zeigen: $z = z'$

$(x,z) \in g \circ f \Rightarrow \exists\, y \in Y$ mit $\boxed{(x,y) \in f}$ und $\boxed{(y,z) \in g}$

$(x,z') \in g \circ f \Rightarrow \exists\, y_1 \in Y$ mit $\boxed{(x,y_1) \in f}$ und $\boxed{(y_1,z') \in g}$

g

$\in g\circ f$

$(x,y)\in f \wedge (x,y_1)\in f \xRightarrow[X\to Y]{f \text{ Abb.}} y=y_1$

$\boxed{(y_1,z')\in g}$ $\quad y=y_1 \Longrightarrow (y,z')\in g$

$(y,z)\in g$ und $(y,z')\in g$

$\xRightarrow[Y\to Z]{g \text{ Abb.}} z=z'$ $\qquad\square$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, bend left, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

(+

Bild- und Urbildmengen

Definition (4.4)

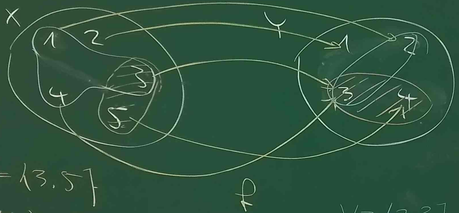
Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$.

(i) Die Teilmenge $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq Y$ wird die Bildmenge von U unter der Abbildung f genannt. Es handelt sich um die Elemente von Y, die man dadurch erhält, dass man f auf ein Element aus U anwendet.

(ii) Die Teilmenge $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subseteq X$ wird die Urbildmenge von V unter f genannt. Sie besteht aus genau den Elementen von X, die nach V abgebildet werden.

Beispiel für eine Bildmenge:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$



$f: X \to Y$

$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3$

$4 \mapsto 3,\ 5 \mapsto 4$

$U = \{3, 5\}$

$f(U) = \{3, 4\}$

$V = \{2, 3\}$

$f^{-1}(V) = \{1, 3, 4\}$

Beziehung zwischen Bild- und Urbildmengen

Proposition (4.5)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Dann gilt

(i) $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ (ii) $U \subseteq f^{-1}(f(U))$

Beweis von Prop. 4.5

zu (ii) geg. Abb. $f: X \to Y$, $V \subseteq Y$

Beh. $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

Sei $y \in f(f^{-1}(V))$. z.z.: $y \in V$

Aus $y \in f(f^{-1}(V))$ folgt (nach Def. der Bildmenge) dass ein $x \in f^{-1}(V)$ mit $f(x) = y$ existiert. Aus $x \in f^{-1}(V)$ folgt (nach Def. der Urbildmenge), dass $f(x)$ in V liegt. $f(x) = y$ und $f(x) \in V \Rightarrow y \in V$ $\square$