Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) reflexiv, falls xRx für alle $x \in R$,

(ii) symmetrisch, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in R$,

(iii) anti-symmetrisch, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in R$,

(iv) transitiv, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in R$ gilt.

Definition (3.3)

Sei X eine Menge.

(i) Eine Halbordnung auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation.

(ii) Bezeichnet $\leq$ eine Halbordnung auf X, so nennt man zwei Elemente $x, y \in X$ vergleichbar bezüglich $\leq$, wenn die Bedingung $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbordnung auf X wird Totalordnung genannt, wenn je zwei Elemente aus X miteinander vergleichbar sind.

Beispiele für Halb- und Totalordnungen

(i) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Relation
(Dies sind Totalordnungen.)

(ii) Teilerrelation auf den natürlichen Zahlen
(Halbordnung, aber keine Totalordnung)

(iii) Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ einer Menge X
(Halbordnung, aber für $|X| \geq 2$ keine Totalordnung)

weiteres Beispiel für eine Halbordnung, die im Allgemeinen keine Totalordnung ist:

Sei A eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A (d.h. die Menge aller Teilmengen von A). Dann ist $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ eine Halbordnung. Eine Totalordnung ist sie genau dann, wenn $|A| \leq 1$.

zu überprüfen: Die Relation „$\subseteq$" auf $\mathcal{P}(A)$ ist

(1) reflexiv (2) antisymmetr. (3) transitiv

außerdem: (4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ Totalordnung $\Leftrightarrow |A| \leq 1$

<u>zu (1)</u> Sei $B \in \mathcal{P}(A)$. z.zg.: $B \subseteq B$

Das ist klar, da für jedes Objekt x die Implikation

$x \in B \Rightarrow x \in B$ gilt

<u>zu (2)</u> z.zg.: $\forall B, C \in \mathcal{P}(A): B \subseteq C \wedge C \subseteq B \Rightarrow B = C$

Seien $B, C \in \mathcal{P}(A)$ mit $B \subseteq C$ und $C \subseteq B$. Es ist bekannt, dass daraus $B = C$ folgt

<u>zu (3)</u> z.zg.: $\forall B, C, D \in \mathcal{P}(A): B \subseteq C$ und $C \subseteq D \Rightarrow B \subseteq D$

Seien $B, C, D \in \mathcal{P}(A)$ mit $B \subseteq C$ und $C \subseteq D$. z.zg.: $B \subseteq D$. Sei $x \in B$, z.zg.: $x \in D$. $x \in B \xRightarrow{B \subseteq C} x \in C$

$x \in C \xRightarrow{C \subseteq D} x \in D$

zu (4) z.zg.: (i) $|A| \leq 1 \Rightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq)$ Totalordn.

(ii) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ Totalordn. $\Rightarrow |A| \leq 1$

($|A|$ = Anzahl der Elemente in A)

zu (i) Vor.: $|A| \leq 1 \Rightarrow |A| = 0 \vee |A| = 1$

1. Fall: $|A| = 0$ Dann ist $A = \emptyset$.

Es gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Seien $B, C \in \mathcal{P}(\emptyset)$ z.zg.: $B \subseteq C$ oder $C \subseteq B$.

$B, C \in \{\emptyset\} \Rightarrow B = C = \emptyset$

$\emptyset \subseteq \emptyset \Rightarrow B \subseteq C \Rightarrow (B \subseteq C) \vee (C \subseteq B)$

z

S

ist

Vo

ver

wed

El

Also

(*)

~~Ang~~

$b \in$

$\Longrightarrow \quad B \subseteq C \Rightarrow (B \subseteq C) \vee (C \subseteq B)$

2. Fall: $|A| = 1 \Rightarrow A = \{a\}$ für ein Objekt a

Es gilt $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

z.zg.: Für jedes Paar (B, C) mit $B, C \in \mathcal{P}(A)$ gilt $B \subseteq C$ oder $C \subseteq B$

1. Fall: $B = \emptyset, C = \emptyset \Rightarrow B \subseteq C$

2. Fall: $B = \emptyset, C = \{a\} \Rightarrow B \subseteq C$

3. Fall: $B = \{a\}, C = \emptyset \Rightarrow C \subseteq B$

4. Fall: $B = \{a\}, C = \{a\} \Rightarrow B \subseteq C$

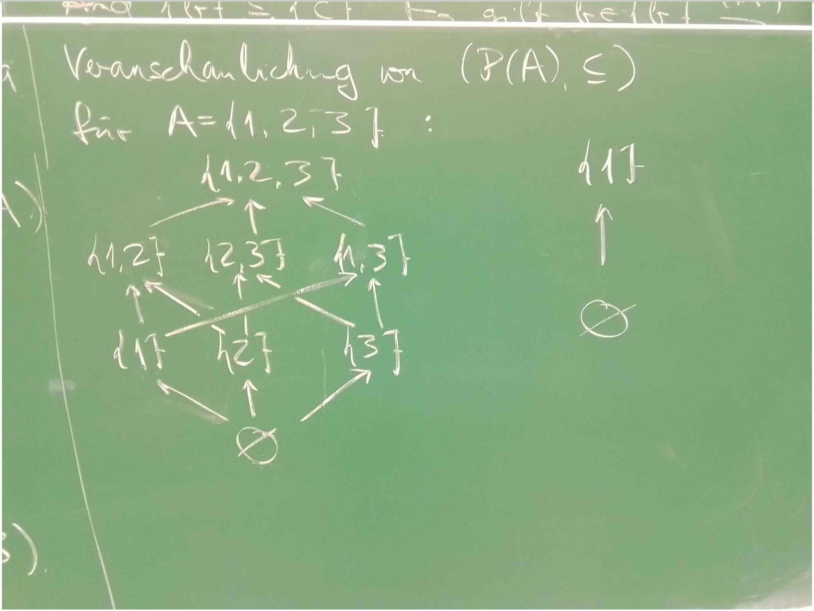
In jedem Fall gilt also $(B \subseteq C) \vee (C \subseteq B)$.

zu (ii) durch Kontraposition

Setze $\neg(|A| \leq 1)$ voraus, zeige: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ ist keine Totalordnung

Vor. $\Rightarrow |A| \geq 2 \Rightarrow$ Es gilt mind. zwei verschiedene Elemente $b, c \in A$. Dann gilt weder $\{b\} \subseteq \{c\}^{(*)}$ noch $\{c\} \subseteq \{b\}$, d.h. die Elemente $\{b\}, \{c\}$ in $\mathcal{P}(A)$ sind nicht vergleichbar. Also ist $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ keine Totalordnung. $\square$

(*) Nachweis von $\{b\} \nsubseteq \{c\}$: ~~Ang~~ $\{b\} \underset{(**)}{\subseteq} \{c\}$. Es gilt $b \in \{b\} \overset{(**)}{\Longrightarrow} b \in \{c\} \Rightarrow b = c$ ↯ da $b \neq c$



(Auf der rechten Tafelhälfte sieht man das Diagramm von
($\mathscr{P}(\{1\})$, $\subseteq$), einer Totalordnung.)

weiteres Beispiel: Teilerrelation

(i) auf den Teilern von $24 = 2^3 \cdot 3$

$$\begin{tikzcd}
 & 24 & \\
8 \arrow[ur] & & 12 \arrow[ul] \\
4 \arrow[u] \arrow[urr] & & 6 \arrow[u] \\
2 \arrow[u] \arrow[urr] & & 3 \arrow[u] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(ii) auf den Teilern von $27 = 3^3$

$$\begin{tikzcd}
27 \\
9 \arrow[u] \\
3 \arrow[u] \\
1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

__Notation:__ Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $a, b \in X$.

$a < b$ bedeutet: $(a \leq b) \wedge (a \neq b)$

$a \geq b$ bedeutet: $b \leq a$

$a > b$ bedeutet: $(b \leq a) \wedge (b \neq a)$

(Man könnte genausogut sagen:
$a > b$ bedeutet $b < a$.)

Größte, kleinste, maximale und minimale Elemente

Definition (3.4)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Man nennt $a \in A$ ein größtes (bzw. kleinstes) Element der Menge A, wenn $a \geq b$ (bzw. $a \leq b$) für alle $b \in A$ gilt.

(ii) Ein Element $a \in A$ wird maximales (bzw. minimales) Element der Menge A genannt, wenn kein $b \in A$ mit $b > a$ (bzw. $b < a$) existiert.

Neben „größtes Element“ und „kleinstes Element“ sind auch die Bezeichnungen „Maximum“ und „Minimum“ gebräuchlich. Das Maximum einer Teilmenge $A \subseteq X$ wird mit $\max(A)$ bezeichnet, das Minimum mit $\min(A)$.

Beziehung zwischen diesen Begriffen

Proposition (3.5)

Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung und $A \subseteq X$.

(i) Es gibt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element in A.

(ii) Das größte (bzw. kleinste) Element von A, sofern es existiert, ist zugleich das einzige maximale (bzw. minimale) Element von A.

(iii) Ist $(X, \leq)$ eine Totalordnung, dann sind die Begriffe „größtes Element“ und „maximales Element“ (bzw. „kleinstes Element“ und „minimales Element“) gleichbedeutend.

In einer Totalordnung $(X, \leq)$ besitzt jede endliche Teilmenge ein Minimum und ein Maximum (Beweis durch vollständige Induktion).

Beweis von Prop 3.5

zu (i) Angenommen, a und a' sind beides größte Elemente von A. z.zg: $a = a'$

a größtes Element von A, $a' \in A \longrightarrow a \geq a'$

a' größtes Element von A, $a \in A \longrightarrow a' \geq a$

$a \geq a'$ und $a' \geq a \Rightarrow a' \leq a$ und $a \leq a'$ $\xRightarrow[\text{symm.}]{\leq \text{ anti-}}$ $a = a'$

zu (ii) Vor: a ist größtes Element von A

z.zg: (1) a ist maximales Element

(2) Es gibt kein maximales Element $\neq a$.

zu (1) Ang., a ist nicht maximal. Dann gibt es ein $b \in A$ mit $b > a$. aber: a ist größtes Element $\Rightarrow a \geq b$

Beh: In keiner Halbordnung kann es Elemente a, b mit

$b \leq a$ und $b > a$ geben.

denn: $b > a \Rightarrow b \geq a$

$b \leq a$ und $b \geq a \Rightarrow b \leq a$ und $a \leq b$

$\overset{\text{Antisymm.}}{\underset{\text{von „}\leq\text{"}}{\Longrightarrow}}$ $a = b$

aber: $b > a \Rightarrow b \neq a$ $\lightning$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Die Annahme, dass ein größeres Element als a existiert, hat also zu einem Widerspruch geführt.

zu (2) Ang., b ist maximales Element von A und $b \neq a$.

a größtes Element von A, $b \in A \Rightarrow a \geq b$

$a \geq b$ und $a \neq b \Rightarrow a > b$ Dies widerspricht der Maximalität von b.

<u>zu (iii)</u> Vor.: $\leq$ ist Totalordn. Sei $a \in A$. z.zg.

a größtes Element von $A \Longleftrightarrow a$ maximales Element von A

„$\Rightarrow$" unter (i) bereits erledigt

„$\Leftarrow$" Vor.: a ist maximales Element von A

z.zg.: a ist größtes Element von A,

d.h. $\forall b \in A: a \geq b$

Sei $b \in A$. z.zg.: $a \geq b$.

Da $\leq$ eine Totalordnung ist, gilt

$a \leq b$ oder $b \leq a$.

1. Fall: $a \leq b$

Es gilt $a = b$ oder $a \neq b$.

Fall 1.1: $a = b$ Da $\leq$ reflexiv ist, gilt dann auch $b \leq a$, also auch $a \geq b$.

Fall 1.2: $a \neq b$

$a \neq b$, $a \leq b \Rightarrow a < b$ $\lightning$ zur Maximalität von a

$\square$

2. Fall: $b \leq a$ Dann ist $a \geq b$.

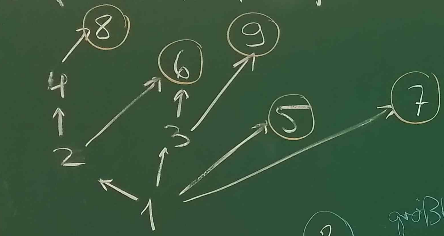
s

ch

t

$a \geq b$

Betrachte die Teilerrelation eingeschränkt auf $\{1, 2, \dots, 9\}$



maximale Elemente

Es gibt kein größtes Element (kein Maximum)

größtes und zugleich einziges maximales Element