All- und Existenzquantor

Quantoren dienen dazu, den Gültigkeitsbereich einer Ausage anzugeben. Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine (sinnvolle) Aussage ergibt.

Definition (2.2)

- Die Aussage $\forall x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} = M$, d.h. $\varphi(c)$ ist für jedes $c \in M$ wahr.
- Die Aussage $\exists x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M | \varphi(c)\} \neq \varnothing$, d.h. es gibt zumindest ein $c \in M$, so dass $\varphi(c)$ wahr ist.

Man nennt Aussagen der Form $\forall x \in M : \varphi(x)$ und $\exists x \in M : \varphi(x)$ auch quantifizierte Aussagen.

Das Symbol $\forall$ heißt Allquantor, das Symbol $\exists$ Existenzquantor.

Beispiele für quantifizierte Ausagen

Betrachte das Aussagenschema

$$\varphi(x) = x \leq 5$$

$\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **falsch** (z.B. ist $\varphi(7)$ falsch)

$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **wahr** (z.B. ist $\varphi(5)$ gültig)

Allgemeines Prinzip:

- Um $\forall x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, muss die Aussage $\varphi(c)$ für **jedes** $c \in M$ hergeleitet werden.
- Um $\exists x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, genügt es, **ein einziges** $c \in M$ anzugeben, für das $\varphi(c)$ erfüllt ist.

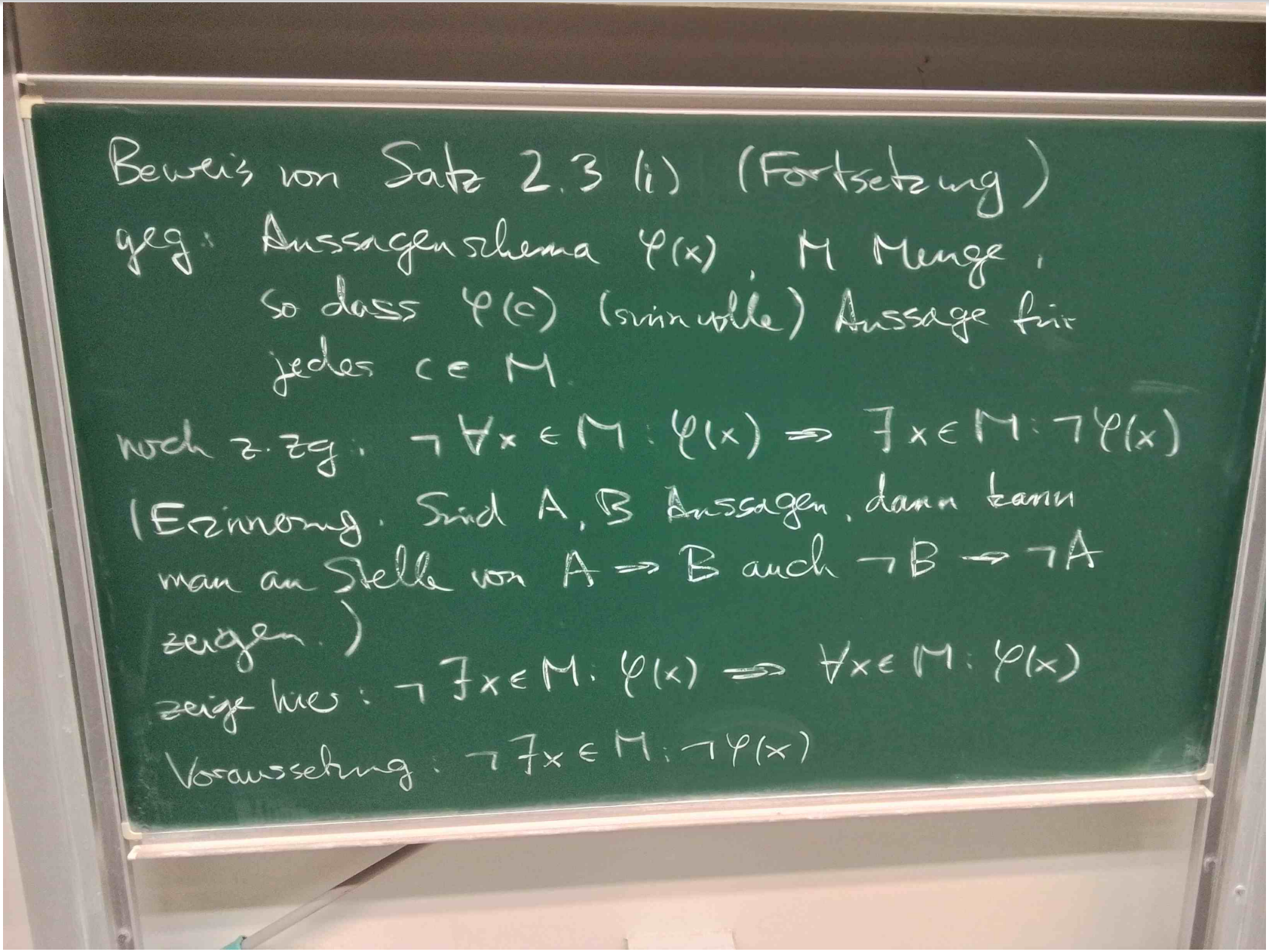
Negation quantifizierter Aussagen

Satz (2.3)

Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

(i) $\neg\forall x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg\varphi(x)$

(ii) $\neg\exists x \in M : \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg\varphi(x)$



Korrektur vorletzte Zeile: fehlendes Negationszeichen

Zeige hier: $\neg\exists\, x \in M : \neg\varphi(x) \Rightarrow \forall\, x \in M : \varphi(x)$

zu zeigen: $\forall x \in M : \varphi(x)$ Sei $c \in M$

z.zg.: $\varphi(c)$ ist gültig Widerspruchsannahme:

$\varphi(c)$ gilt nicht, d.h. $\neg\varphi(c)$ gilt Dann folgt

$\exists x \in M : \neg\varphi(x)$ ↯ zur Voraussetzung

Also ist $\varphi(c)$ gültig

□

Verschachtelung von Quantoren

geg.: Mengen M, N und ein Aussagenschema $\varphi(x, y)$ mit zwei Parametern x, y, so dass $\varphi(c, d)$ für alle $c \in M$, $d \in N$ sinnvolle Aussage

- $\forall y \in N : \varphi(x, y)$ ist ein **Aussagenschema** mit x als einzigem Parameter

- $\exists x \in M : \forall y \in N : \varphi(x, y)$ ist eine **Aussage**

Bei solchen Verschachtelungen ist die **Reihenfolge** entscheidend für die Bedeutung der Aussage!

Beispiel zur Reihenfolge von Quantoren

Beispiel 1: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : y > x$

„Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein (im allgemeinen von x abhängiges) $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$.“

Wahr, denn für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ gilt zum Beispiel $c + 1 > c$.

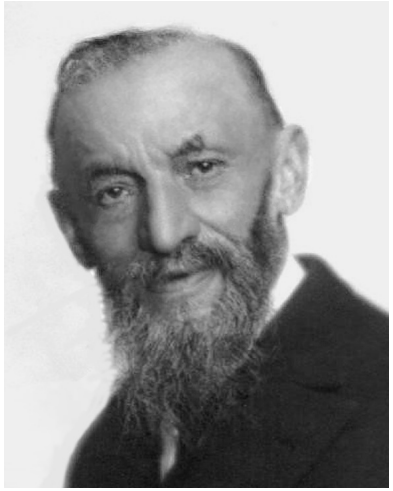
Beispiel 2: $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : y > x$

„Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ jeweils $y > x$ erfüllt ist.“

Falsch, es gibt keine reelle Zahl, die größer als alle anderen ist.

Quantoren und deren Reihenfolge spielen bei Aussagen zur Analysis eine **extrem wichtige** Rolle!

Die Peano-Axiome



Guiseppe Peano
(1858-1932)

(P1) Es gibt ein ausgezeichnetes Element in $\mathbb{N}$, das wir mit 1 bezeichnen.

(P2) Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger, der mit $n+1$ bezeichnet wird.

(P3) Kein Element aus $\mathbb{N}$ besitzt die 1 als Nachfolger.

(P4) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m+1 = n+1$, dann folgt $m = n$.

(P5) *Induktionsprinzip:*
Sei φ ein Aussagenschema mit folgenden Eigenschaften: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n)$ eine sinnvolle Aussage, darüber hinaus seien $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ wahre Aussagen. Dann ist auch $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$ wahr.

Die vollständige Induktion

Ausgangssituation der vollständigen Induktion ist ein Aussagenschema $\varphi(x)$ mit der Eigeschaft, dass $\varphi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine sinnvolle Aussage liefert. Ziel ist der Beweis dieser (unendlich vielen) Aussagen.

Auf Grund des Peano-Axioms (P5) genügt es nachzuweisen, dass

- die Aussage $\varphi(1)$ wahr ist (Induktionsanfang) und
- die Implikation $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Induktionsschritt)

Sind diese beiden Punkte erfüllt, dann ist $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Anwendungsbeispiel

Satz (2.4)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gegeben durch

$$1 + 2 + ... + n \quad = \quad \frac{1}{2} n(n+1).$$

Beweis von Satz 2.4:

zzg: $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$, wobei das Aussagenschema $\varphi(x)$ gegeben ist durch

$$1 + 2 + \ldots + x = \frac{1}{2} x (x+1)$$

zu zeigen: (1) $\varphi(1)$

(2) $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$

zu (1) Es gilt $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$.

$\Rightarrow$ Aussage $\varphi(1)$ ist wahr.

zu (2) Sei $n \in \mathbb{N}$ zzg: $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

Setze $\varphi(n)$ voraus, d.h.

$$1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (*)$$

z.Zg.: $\varphi(n+1)$, also

$$1+2+\ldots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

Es gilt:

$$1+2+\ldots+n+(n+1) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)+1\cdot(n+1) = \left(\frac{1}{2}n+1\right)(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

Die Aussage $\varphi(n+1)$ ist also wahr

□

Weiteres Beispiel: Zeige:

„Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n+1)(2n+1)$ durch 6 teilbar."

Betrachte das Aussagenschema $\varphi(x)$ gegeben durch

„Die Zahl $x(x+1)(2x+1)$ ist teilbar durch 6."

z.zg.: (1) $\varphi(1)$ (2) $\forall x \in \mathbb{N}: \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$

zu (1) $1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Die Zahl 6 ist durch 6 teilbar

(da $6 = 1 \cdot 6$) $\Rightarrow \varphi(1)$ ist wahr

zu (2) Sei $n \in \mathbb{N}$. z.zg.: $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

Setze $\varphi(n)$ voraus. Das bedeutet:

$n(n+1)(2n+1)$ ist durch 6 teilbar, d.h.

es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n(n+1)(2n+1) \overset{(*)}{=} k \cdot 6$

z.zg.: $\varphi(n+1)$ gilt, d.h. $(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$

ist durch 6 teilbar. Es gilt

$$(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$= (n+1) \cdot n \cdot (2n+3) + 2 \cdot (n+1)(2n+3)$$

$$= (n+1) \cdot n(2n+1) + 2 \cdot (n+1) \cdot n + 2(n+1)(2n+3)$$

$$\overset{(*)}{=} k \cdot 6 + 2n^2 + 2n + 4n^2 + 4n + 6n + 6$$

$$= k \cdot 6 + 6n^2 + 12n + 6 = (k + n^2 + 2n + 1) \cdot 6$$

□

Also ist $(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$ durch 6 teilbar, d.h. $\varphi(n+1)$ ist wahr. $\square$

Definition (3.1)

Seien X und Y Mengen.

(i) Eine Relation auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

(ii) Eine Relation zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.

intuitiv:

„Relation“ = Beziehung zwischen den Elementen von X und denen von Y

Beispiel: die Teilerrelation

Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

und $R =$ „ist Teiler von“, als Menge

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$$

Darstellung in Tabellenform

	1	2	3	4	5	6
1	■	■	■	■	■	■
2	□	■	□	■	□	■
3	□	□	■	□	□	■

Weitere Beispiele für Relationen

(i) Sei $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R =$„ist kleiner als“

$$R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

(ii) auf der Menge $\mathbb{R}$ die beiden Relationen

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y\}$$

Weitere Beispiele für Relationen

Relationen zwischen zwei Mengen X und Y können auch ganz willkürlich gewählte Teilmengen von $X \times Y$ sein, im Fall $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{1, 2\}$ zum Beispiel

$$T = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\} \quad \text{oder}$$
$$U = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

Beim Umgang mit Relationen verwendet man häufig die folgende Infix-Notation: Ist R eine Relation zwischen zwei Mengen X und Y, dann schreibt man die Aussage „$(x, y) \in R$“ sehr oft in der Form „xRy“. Im Beispiel oben gelten beispielsweise

$$2T1\ ,\ 3T2\ ,\ 3U1 \quad \text{aber nicht} \quad 3T1.$$

Als Bezeichnung für Relationen werden häufig Symbole wie $\leq$, $<$, $\prec$, $\equiv$, $\cong$ usw. verwendet.

Eigenschaften von Relationen

Definition (3.2)

Sei X eine Menge. Eine Relation R auf X heißt

(i) reflexiv, falls xRx für alle $x \in R$,

(ii) symmetrisch, falls $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in R$,

(iii) anti-symmetrisch, falls $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in R$,

(iv) transitiv, falls $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in R$ gilt.

Ordnungsrelationen

Definition (3.3)

Sei X eine Menge.

(i) Eine Halbordnung auf X ist eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation.

(ii) Bezeichnet $\leq$ eine Halbordnung auf X, so nennt man zwei Elemente $x, y \in X$ vergleichbar bezüglich $\leq$, wenn die Bedingung $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbordnung auf X wird Totalordnung genannt, wenn je zwei Elemente aus X miteinander vergleichbar sind.

Beispiele für Halb- und Totalordnungen

(i) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen $\leq$-Relation
(Dies sind Totalordnungen.)

(ii) Teilerrelation auf den natürlichen Zahlen
(Halbordnung, aber keine Totalordnung)

(iii) Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ einer Menge X
(Halbordnung, aber für $|X| \geq 2$ keine Totalordnung)

Betrachte auf $\mathbb{N}$ die Teilerrelation gegeben durch $m \mid n \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = km$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$

Beh. Die Relation ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung.

überprüfe: (i) Reflexivität (ii) Antisymmetrie
(iii) Transitivität
(iv) Es gibt zwei nicht vergleichbare Elemente.

zu (i) $\forall n \in \mathbb{N} : n \mid n$ Sei $n \in \mathbb{N}$

Es gilt $n = 1 \cdot n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = k \cdot n$ ist erfüllt

$\Rightarrow n \mid n$ ist erfüllt

zu ii) z.zg. $\forall m, n \in \mathbb{N}: \overbrace{m \mid n \wedge n \mid m}^{(*)} \Rightarrow m = n$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ Setze (*) voraus

$m \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = k \cdot m$

$n \mid m \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}: m = l \cdot n$

einsetzen $\Rightarrow m = l\,n = l \cdot (k \cdot m) = l\,k \cdot m \overset{\cdot m^{-1}}{\Rightarrow}$

$1 = l \cdot k \overset{k,l \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} k = l = 1 \Rightarrow n = k \cdot m = 1 \cdot m = m$

zu (iii) z.zg $\forall m, n, p \in \mathbb{N}: m \mid n \wedge n \mid p \Rightarrow m \mid p$

Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ z.zg: $m \mid n \wedge n \mid p \Rightarrow m \mid p$

Setze $m \mid n$ und $n \mid p$ voraus z.zg.: $m \mid p$

$m \mid n \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = k\,m$

$n \mid p \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{N} : p = l \cdot n$

$\Rightarrow p = l \cdot n = l \cdot (k \cdot m) = (l \cdot k) \cdot m$

$l k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N} : p = r\,m$ ist erfüllt

$\Rightarrow m \mid p$

zu (ii) z.zg.: Es gibt $m, n \in \mathbb{N}$, so dass weder $m \mid n$ noch $n \mid m$ gilt.

Bsp: Es gilt weder $2 \mid 3$ noch $3 \mid 2$.

Angenommen, es gilt $2 \mid 3 \Rightarrow$

$\exists\, k \in \mathbb{N} : 3 = k \cdot 2 \overset{\cdot \frac{1}{2}}{\Rightarrow} k = \frac{3}{2}$ ↯

da $3/2 \notin \mathbb{N}$.

Angenommen. $3 \mid 2 \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{N}: 2 = l \cdot 3$

$\xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}}$ $l = 2/3$ ↯ da $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ ($\Rightarrow$ Bsh.) □