

§ 2. Mengenlehre und Prädikatenlogik

Nahezu **alle** in der heutigen Mathematik verwendeten Konzepte lassen sich auf den Begriff der *Menge* zurückführen.



Definition (2.1)

(„naive Mengendefinition“ nach Cantor)

„Eine **Menge** ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“

Allgemein übliche Notation der Mengenlehre

$x \in M$	Das Objekt x ist Element der Menge M .
$x \notin M$	Das Objekt x ist <i>kein</i> Element der Menge M .
$M \subseteq N$	Jedes Element x von M ist auch ein Element von N .
$M = N$	Es gilt $x \in M \Leftrightarrow x \in N$ für alle Objekte x .
$M \supseteq N$	gleichbedeutend mit $N \subseteq M$
$M \subsetneq N$	$M \subseteq N \wedge \neg(M = N)$
$M \supsetneq N$	gleichbedeutend mit $N \subsetneq M$
$\emptyset$	die leere Menge

Die Menge $\emptyset$ ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft $x \notin \emptyset$ für alle Objekte x .

In der Literatur wird auch das Symbol „ $\subset$ “ verwendet, aber die Bedeutung ist nicht einheitlich. Manchmal ist „ $\subsetneq$ “, manchmal aber auch „ $\subseteq$ “ gemeint. Deshalb muss man immer nachsehen, wie das Symbol in der entsprechenden Quelle verwendet wird.

Anstelle von $\emptyset$ ist auch $\{ \}$ als Symbol für die leere Menge gebräuchlich.

Man beachte, dass $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ gleichermaßen wahre Aussagen sind. Die Aussage $\{1, 2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ ist falsch.

Die Aussagen $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ sind wiederum beide wahr.

Möglichkeiten zur Mengendefinition

(1) Umgangssprachlich

„Sei P die Menge aller Primzahlen.“

(2) Durch Aufzählung

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{oder kürzer} \quad M = \{1, 2, \dots, 7\}$$

(3) Durch eine definierende Bedingung

Ist $\varphi(x)$ ein Aussagenschema und M eine Menge, dann besteht die Menge

$$N = \{c \in M \mid \varphi(c)\}$$

aus genau denjenigen Elementen c einer Grundmenge M , für die $\varphi(c)$ eine **wahre Aussage** ist.

Häufig verwendete Mengenoperationen

- (i) **Durchschnitt** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- (ii) **Vereinigung** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- (iii) **Differenz** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- (iv) **Potenzmengen** $\mathcal{P}(A) = \{B \text{ Menge} \mid B \subseteq A\}$
- (v) **kartesisches Produkt** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Beispiele für Potenzmengen

A Menge $\Rightarrow P(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$

(i) $A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

(falsch: $P(A) = \{\emptyset, 1\}$)

Es gilt $\{1\} \in P(A)$, aber nicht $1 \in P(A)$.

(ii) $A = \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Es gilt $\{1, 2\} \in P(A)$, aber nicht $\{1, 2\} \subseteq P(A)$

$\{\{1, 2\}\} \subseteq P(A)$ richtig

$$(iii) A = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

[Die Reihenfolge spielt bei einer Mengenangabe keine Rolle, z.B. ist $\{4, 5\} = \{5, 4\}$]

(iv) Die Menge $P(\mathbb{R})$ hat sehr viele Elemente, z.B. $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \setminus \{1, 2\}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \dots$

$$(v) P(P(\{1\})) = P(\{\emptyset, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$$

falsch:
 $\{1\} \notin \{\emptyset, \{1\}\}$
 $\rightarrow \{1\} \notin P(P(\{1\}))$

Bem. Bei Paaren ist die Reihenfolge wichtig. z.B. ist $(4, 5) \neq (5, 4)$

3-Tupel sind Objekte der Form (a, b, c)

4-Tupel haben die Form (a, b, c, d) usw.

(auch hier: $(1, 1, 2) \neq (1, 2, 1)$)

Tupel = 3-Tupel

Kartesisches Produkt: Seien A, B Mengen

Dann ist $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Beispiele:

$$(i) \quad \{1, 2\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4)\}$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 4) \}$$

$$\text{(ii) } \{1, 3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$\text{(iii) } \mathcal{P}(\{1, 1\}) \times \{3, 4\} = \{\emptyset, \{1, 1\}\} \times \{3, 4\} \\ = \{(\emptyset, 3), (\emptyset, 4), (\{1, 1\}, 3), (\{1, 1\}, 4)\}$$

$$\text{(iv) } \emptyset \times \{3, 4\} = \emptyset$$

Vorgehensweise beim Beweis von Mengengleichungen

Seien M , N , P Mengen.

Um die Inklusion $M \subseteq N$ zu beweisen, beginnt man mit der Formulierung „Sei $x \in M$.“ und zeigt unter der Voraussetzung $x \in M$, dass $x \in N$ gilt.

Um $M = N$ zu zeigen, beweist man die Inklusionen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ einzeln.

Sind M und N beides Teilmengen von P , kann man auch folgendermaßen vorgehen: Man beginnt mit „Sei $x \in P$.“ und beweist unter der Voraussetzung $x \in P$ die Äquivalenz

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N ,$$

zum Beispiel durch eine Kette von Äquivalenzumformungen.

Anwendungsbeispiele

Beweis der Gleichung

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \} = \{ -3, 2 \}$$

Beweis der Gleichung $M = N$ für

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy + 1)z = 0\}$$

$$N = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -\frac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}$$

Beweis der Gleichung

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$$

c) (hier: $P = \mathbb{R}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$
s.w. $N = \{-3, 2\}$.)

Sei $x \in \mathbb{R}$. z.zg.: $x \in M \Leftrightarrow x \in N$

$$x \in M \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0$$

(1.4).

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee (x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-3 \Rightarrow x \in \{-3, 2\}$$

47

7

geg. die Mengen $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy+1)z = 0\}$

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und

$N_2 = \{(x, -\frac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}$

z.zg. $M = N$, zeige dafür (i) $M \subseteq N$ (ii) $N \subseteq M$

zu (i) Sei $p \in M$. z.zg. $p \in N$

$p \in M \Rightarrow$ Es gibt $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $p = (x, y, z)$

und $(xy+1)z = 0 \Rightarrow xy+1=0$ oder $z=0$

1. Fall: $xy+1=0$

geg. die Mengen $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (xy+1)z = 0\}$

$N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und

$N_2 = \{(x, -\frac{1}{x}, z) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}\}$

z.zg. $M = N$, zeige dafür (i) $M \subseteq N$ (ii) $N \subseteq M$

zu (i) Sei $p \in M$. z.zg. $p \in N$

$p \in M \Rightarrow$ Es gibt $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $p = (x, y, z)$

und $(xy+1)z = 0 \Rightarrow xy+1=0$ oder $z=0$

1. Fall: $xy+1=0$

$$\Rightarrow x \neq 0 \text{ (sonst } 0+1=0 \text{) und } y = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow p = (x, y, z) = (x, -\frac{1}{x}, z) \text{ und } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow p \in N_2 \xrightarrow{N_2 \subseteq N_1 \cup N_2 = N} p \in N$$

$$\text{2. Fall: } z = 0 \Rightarrow p = (x, y, z) = (x, y, 0)$$

$$\text{und } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow p \in N_1 \xrightarrow{N_1 \subseteq N_1 \cup N_2 = N} p \in N$$

$$\text{Zus(ii)} \quad p \in N, \text{ z.zgf. } p \in M$$

$$p \in N \Rightarrow p \in N_1 \cup N_2 \Rightarrow p \in N_1 \text{ oder } p \in N_2$$

$$\text{1. Fall: } p \in N_1 \Rightarrow \text{Es gibt } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } p = (x, y, 0)$$

$$\text{Es gilt } (xy+1) \cdot 0 = 0, \text{ d.h. } (x, y, 0) \text{ erfüllt die}$$

definierende Bedingung von M .

$$\Rightarrow p = (x, y, 0) \in M$$

2. Fall: $p \in N_2$

$p \in N_2 \Rightarrow$ Es gibt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{R}$

mit $p = (x, -\frac{1}{x}, z)$. Es gilt

$$(x \cdot (-\frac{1}{x}) + 1) \cdot z = ((-1) + 1) \cdot z =$$

$$0 \cdot z = 0 \Rightarrow (x, -\frac{1}{x}, z) \text{ erfüllt die}$$

definierende Bedingung von M .

$$\Rightarrow p = (x, -\frac{1}{x}, z) \in M.$$



All- und Existenzquantor

Quantoren dienen dazu, den **Gültigkeitsbereich** einer Aussage anzugeben. Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine (sinnvolle) Aussage ergibt.

Definition (2.2)

Die Aussage $\forall x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M \mid \varphi(c)\} = M$, d.h. $\varphi(c)$ ist **für jedes** $c \in M$ wahr.

Die Aussage $\exists x \in M : \varphi(x)$ bedeutet: $\{c \in M \mid \varphi(c)\} \neq \emptyset$, d.h. es gibt **zumindest ein** $c \in M$, so dass $\varphi(c)$ wahr ist.

Man nennt Aussagen der Form $\forall x \in M : \varphi(x)$ und $\exists x \in M : \varphi(x)$ auch **quantifizierte** Aussagen.

Das Symbol $\forall$ heißt **Allquantor**, das Symbol $\exists$ **Existenzquantor**.

Beispiele für quantifizierte Aussagen

Betrachte das Aussagenschema

$$\varphi(x) = x \leq 5$$

$\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **falsch** (z.B. ist $\varphi(7)$ falsch)

$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 5$ **wahr** (z.B. ist $\varphi(5)$ gültig)

Allgemeines Prinzip:

Um $\forall x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, muss die Aussage $\varphi(c)$ für **jedes** $c \in M$ hergeleitet werden.

Um $\exists x \in M : \varphi(x)$ zu beweisen, genügt es, **ein einziges** $c \in M$ anzugeben, für das $\varphi(c)$ erfüllt ist.

Satz (2.3)

Sei M eine Menge und $\varphi(x)$ ein Aussagenschema mit der Eigenschaft, dass $\varphi(c)$ für jedes $c \in M$ eine sinnvolle Aussage ist. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

- (i) $\neg \forall x \in M : \varphi(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg \varphi(x)$
- (ii) $\neg \exists x \in M : \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg \varphi(x)$

Beweis von Satz 2.3 (i)

geg.: Menge M , Aussagenschema $\varphi(x)$,
so dass $\varphi(c)$ für alle $c \in M$ sinnvolle
Aussage z.z.:

$$\neg(\forall x \in M: \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M: \neg \varphi(x)$$

" $\Leftarrow$ ": (durch Widerspruch)

Voraussetzung $\Rightarrow$ Es gibt ein $c \in M$,
für das $\varphi(c)$ nicht gilt.

Angenommen, $\neg(\forall x \in M: \varphi(x))$ ist
falsch. Dann gilt $\forall x \in M: \varphi(x)$.

Es gilt also $\varphi(a)$ für alle $a \in M$.

Insbesondere gilt $\varphi(c)$.

also: $\varphi(c)$ gilt und $\varphi(c)$ gilt nicht $\Downarrow$

R

□