

$$3 \leq a \text{ und } a \leq 4 \Rightarrow a \in]3, 4]$$

Mengengleichungen

Aufgabe Beweisen Sie die folgenden Gleichungen.

ii) $[1, 4] \setminus [2, 3] = [1, 2[\cup]3, 4]$

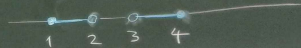
wobei $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

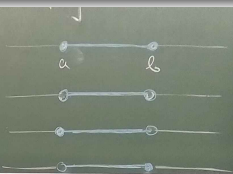


wobei $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



Sei $M = [1, 4] \setminus [2, 3]$ und $N = [1, 2[\cup]3, 4]$

zu zeigen: (1) $M \subseteq N$ (2) $N \subseteq M$

zu (1) ($M \subseteq N$ bedeutet: $\forall x \in \mathbb{R}: x \in M \Rightarrow x \in N$)

Sei $a \in \mathbb{R}$. z.zg: $a \in M \Rightarrow a \in N$ Setze $a \in M$ voraus.

z.zg: $a \in N$ $a \in M \Rightarrow a \in [1, 4] \setminus [2, 3] \Rightarrow a \in [1, 4]$

und $a \notin [2, 3]$.

1. Fall: $a < 2$ $a \in [1, 4] \Rightarrow a \geq 1$ Zusammen mit $a < 2$ folgt $a \in [1, 2[$.

2. Fall: $a \geq 2$ Ang. $a \leq 3$. Dann gilt $2 \leq a$ und $a \leq 3 \Rightarrow a \in [2, 3]$

$\Downarrow$ zu $a \notin [2, 3]$. also: $a > 3$, außerdem: $a \in [1, 4] \Rightarrow a \leq 4$

$3 < a$ und $a \leq 4 \Rightarrow a \in]3, 4]$

Im 1. Fall gilt also $a \in [1, 2[$, und wegen $N = [1, 2[\cup]3, 4]$ folgt daraus $a \in N$.

Im 2. Fall gilt $a \in]3, 4]$, wegen $N = [1, 2[\cup]3, 4]$ gilt somit auch $a \in N$. Also ist $a \in N$ in jedem Fall erfüllt.

zu (2) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in N$. z.zg.: $a \in M$

$$a \in N \Rightarrow a \in [1, 2[\cup]3, 4] \Rightarrow a \in [1, 2[$$

oder $a \in]3, 4]$.

1. Fall: $a \in [1, 2[$ z.zg.: $a \in [1, 4]$ und $a \notin [2, 3]$,
(denn daraus folgt $a \in [1, 4] \setminus [2, 3]$, also $a \in M$)

$$\text{z.zg.: (1) } \varphi(1) \quad (2) \forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$$

$$a \in [1, 2[\Rightarrow a \geq 1 \quad a \in [1, 2[\Rightarrow a < 2 \Rightarrow a \leq 4$$

$$a \geq 1 \text{ und } a \leq 4 \Rightarrow a \in [1, 4]$$

$$\text{Ang. } a \in [2, 3] \Rightarrow a \geq 2 \nleftrightarrow \text{zu } a < 2$$

$$\text{also: } a \notin [2, 3]$$

$$\text{2. Fall: } a \in]3, 4] \text{ z.zg. auch hier: } a \in [1, 4] \text{ und } a \notin [2, 3]$$

$$a \in]3, 4] \Rightarrow a > 3 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a \geq 1$$

$$a \in]3, 4] \Rightarrow a \leq 4$$

$$a \geq 1 \text{ und } a \leq 4 \Rightarrow a \in [1, 4]$$

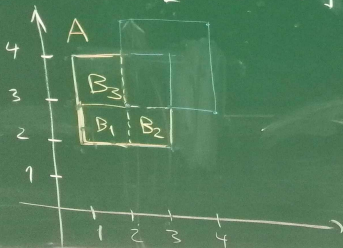
$$\text{Ang. } a \in [2, 3] \Rightarrow a \leq 3 \nleftrightarrow \text{zu } a > 3$$

$$\text{also: } a \notin [2, 3] \quad [A \Rightarrow A \vee B]$$

$$(*) \ a > 3 \Rightarrow (a > 3) \vee (a = 3) \Rightarrow a \geq 3$$

außerdem: $a \geq 3$ und $3 \geq 1 \Rightarrow$ transitiv $a \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & ([1,3] \times [2,4]) \setminus ([2,4] \times [3,5]) \quad A \\ &= ([1,2] \times [2,3[) \cup ([2,3] \times [2,3[) \\ &\quad \cup ([1,2] \times [3,4]) \end{aligned}$$



Bezeichne die Menge links mit A ,
die Menge rechts mit B , $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$
mit B_1, B_2, B_3 wie oben angeg.

zu zeigen: (i) $A \subseteq B$ (ii) $B \subseteq A$

zu (i) Sei $p \in A$. z.zg: $p \in B$

$$p \in A, A = ([1,3] \times [2,4]) \setminus ([2,4] \times [3,5])$$

$$\Rightarrow p \in [1,3] \times [2,4] \text{ und } p \notin [2,4] \times [3,5]$$

$$p \in [1,3] \times [2,4] \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } p = \underline{(x, y)},$$
$$x \in [1,3] \text{ und } y \in [2,4]$$

$$x \in [1,3] \Rightarrow \underline{x \geq 1} \text{ und } \underline{x \leq 3}$$

$$y \in [2, 4] \Rightarrow \underline{y \geq 2} \text{ und } \underline{y \leq 4}$$

Betrachte die Fälle

- (1) $x < 2, y < 3$
- (2) $x \geq 2, y < 3$
- (3) $x < 2, y \geq 3$
- (4) $x \geq 2, y \geq 3$

zu (1) Voraussetzung: $\underline{x < 2}$ und $\underline{y < 3}$

Ziel: $p = (x, y) \in B_1$, dafür $z \geq g$:

$$x \in [1, 2] \downarrow \text{ und } y \in [2, 3] \checkmark$$

Es gilt $x \geq 1$, und aus $x < 2$ folgt $x \leq 2$.

$$x \geq 1 \text{ und } x \leq 2 \Rightarrow x \in [1, 2]$$

↓ und $y \in [2, 3[$ ✓
Es gilt $x \geq 1$, und aus $x < 2$ folgt $x \leq 2$.
 $x \geq 1$ und $x \leq 2 \Rightarrow x \in [1, 2]$

Es gilt $y \geq 2$ und $y < 3$.
 $\Rightarrow y \in [2, 3[$

zu (2) ... (Übung)

zu (ii) Sei $p \in B$. z.zg: $p \in A$

$p \in B$, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \rightarrow$

$p \in B_1$ oder $p \in B_2$ oder $p \in B_3$

1. Fall: $p \in B_1$

$p \in B_1$, $B_1 = [1, 2] \times [2, 3[\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}$ mit $p = (x, y)$

und $x \in [1, 2]$, $y \in [2, 3[\Rightarrow x \geq 1, x \leq 2, y \geq 2, y < 3$

z.zg: $p \in [1, 3] \times [2, 4]$ und $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$

Beweis der zweiten Mengengleichung

Der Vollständigkeit halber geben wir hier noch einmal den gesamten Beweis der zweiten Mengengleichung an. Es sei

$$A = ([1, 3] \times [2, 4]) \setminus ([2, 4] \times [3, 5])$$

und $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ mit

$$B_1 = [1, 2] \times [2, 3[, \quad B_2 = [2, 3] \times [2, 3[, \quad B_3 = [1, 2[\times [3, 4].$$

Unser Ziel ist der Beweis von $A = B$. Dazu muss $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gezeigt werden.

Beweis von $A \subseteq B$:

Sei $p \in A$. Dann gilt $p \in [1, 3] \times [2, 4]$ und $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$. Aus der ersten Aussage folgt, die Existenz von $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \in [1, 3]$ und $y \in [2, 4]$. Es folgt $1 \leq x \leq 3$ und $2 \leq y \leq 4$. Wir unterscheiden nun vier Fälle.

(1) $x < 2$ und $y < 3$

(2) $x \geq 2$ und $y < 3$

(3) $x < 2$ und $y \geq 3$

(4) $x \geq 2$ und $y \geq 3$

zu (1) Aus $x < 2$ folgt $x \leq 2$. Zusammen mit $x \geq 1$ folgt daraus wiederum $x \in [1, 2]$. Aus $y \geq 2$ und $y < 3$ folgt $y \in [2, 3[$. Aus $x \in [1, 2]$ und $y \in [2, 3[$ folgt wiederum, dass $p = (x, y)$ in $B_1 = [1, 2] \times [2, 3[$ enthalten ist. Wegen $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B$ liegt p also auch in B .

zu (2) Aus $x \geq 2$ und $x \leq 3$ folgt $x \in [2, 3]$. Aus $y \geq 2$ und $y < 3$ folgt $y \in [2, 3[$. Insgesamt liegt $p = (x, y)$ also in $B_2 = [2, 3] \times [2, 3[$, und daraus folgt $p \in B$.

zu (3) Aus $x \geq 1$ und $x < 2$ folgt $x \in [1, 2[$. Aus $y \geq 3$ und $y \leq 4$ folgt $y \in [3, 4]$. Folglich liegt $p = (x, y)$ in $B_3 = [1, 2[\times [3, 4]$, und somit auch in B .

zu (4) Aus $2 \leq x$ und $x \leq 3 \leq 4$ folgt $x \in [2, 4]$. Aus $3 \leq y$ und $y \leq 4 \leq 5$ folgt $y \in [3, 5]$. Insgesamt ist y also ein Element von $[2, 4] \times [3, 5]$. Aber genau das wurde oben ausgeschlossen. Dieser Widerspruch zeigt, dass Fall (4) unter unseren Voraussetzungen nicht eintreten kann.

Beweis von $B \subseteq A$:

Sei $p \in B$. Nach Definition von B folgt $p \in B_1 \cup B_2 \cup B_3$, es gilt also $p \in B_1$ oder $p \in B_2$ oder $p \in B_3$. Wir unterscheiden die Fälle

(1) $p \in B_1$

(2) $p \in B_2$

(3) $p \in B_3$

Wegen $p \in B$ gilt insbesondere $p \in \mathbb{R}^2$. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$ mit $p = (x, y)$. Wir gehen nun die drei Fälle durch.

zu (1) In diesem Fall gilt $x \in [1, 2]$ und $y \in [2, 3[$, nach Definition von B_1 . Daraus folgt $1 \leq x \leq 2$ und $2 \leq y < 3$. Aus $x \leq 2$ folgt $x \leq 3$, insgesamt also $1 \leq x \leq 3$ und damit $x \in [1, 3]$. Aus $y < 3$ folgt $y \leq 4$, also $2 \leq y \leq 4$ und $y \in [2, 4]$. Damit liegt $p = (x, y)$ in $[1, 3] \times [2, 4]$.

Außerdem gilt $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$. Denn wäre $p = (x, y)$ in $[2, 4] \times [3, 5]$ enthalten, dann würde $y \in [3, 5]$ folgen, insbesondere $y \geq 3$, was zu $y < 3$ im Widerspruch steht. Aus $p \in [1, 3] \times [2, 4]$ und $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$ folgt insgesamt $p \in A$.

zu (2) In diesem Fall gilt $x \in [2, 3]$ und $y \in [2, 3[$, also $2 \leq x \leq 3$ und $2 \leq y < 3$. Aus $x \geq 2$ folgt $x \geq 1$, und aus $1 \leq x \leq 3$ folgt $x \in [1, 3]$. Aus $y < 3$ folgt $y \leq 4$, also $2 \leq y \leq 4$ und $y \in [2, 4]$. Damit liegt $p = (x, y)$ in $[1, 3] \times [2, 4]$. Außerdem gilt $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$. Denn wäre $p = (x, y)$ in $[2, 4] \times [3, 5]$ enthalten, dass würde $y \in [3, 5]$ folgen, insbesondere $y \geq 3$, was wieder zu $y < 3$ im Widerspruch steht. Wie unter (1) folgt nun $p \in A$.

zu (3) In diesem Fall gilt $x \in [1, 2[$ und $y \in [3, 4]$, also $1 \leq x < 2$ und $3 \leq y \leq 4$. Aus $x \leq 2$ folgt $x \leq 3$, insgesamt also $1 \leq x \leq 3$ und damit $x \in [1, 3]$. Aus $y \geq 3 \geq 2$ und $y \leq 4$ folgt $y \in [2, 4]$. Damit liegt $p = (x, y)$ wieder in $[1, 3] \times [2, 4]$. Außerdem gilt $p \notin [2, 4] \times [3, 5]$. Denn wäre $p = (x, y)$ in $[2, 4] \times [3, 5]$ enthalten, dass würde $x \in [2, 4]$ folgen, insbesondere $x \geq 2$, was diesmal zu $x < 2$ im Widerspruch steht. Wie zuvor erhalten wir $p \in A$.

Aufgabe Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
 (geometrische Summenformel)

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ z.z.g. $1 + a + \dots + a^n \stackrel{(*)}{=} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

Ansatz: Wende vollständige Induktion an auf das Aussagenschema
 $P(n)$ geg. durch die Gleichung (*).

zu zeigen ist: (1) $P(1)$ (2) $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \rightarrow P(n+1)$

zu (1) z.z.g. $1 + a^1 = \frac{1 - a^2}{1 - a}$

$$\frac{1 - a^2}{1 - a} = \frac{(1 - a)(1 + a)}{1 - a} = 1 + a = 1 + a^1$$

$\uparrow$ 3. binomische

und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
 (geometrische Summenformel)

Sei $a \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$ dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $1 - a^{n+1}$

$$\frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a = 1+a^1$$

$\uparrow$ 3. binomische Formel
 $1-a \neq 0$

zu (2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $P(n)$ voraus. z.zg: $P(n+1)$, also

$$\text{z.zg: } 1 + a + \dots + a^{n+1} = \frac{1 - a^{(n+1)+1}}{1 - a}$$

Die Voraussetzung $P(n)$ ist gleichbedeutend mit

$$1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad (**)$$

Es gilt

$$1 + a + \dots + a^n + a^{n+1} \stackrel{(**)}{=} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} \stackrel{1-a \neq 0}{=} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{(1-a)a^{n+1}}{1-a}$$

$$= \frac{1 - a^{n+1} + (1-a)a^{n+1}}{1-a} = \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a} =$$

$$\frac{1 - a^{n+2}}{1-a} = \frac{1 - a^{(n+1)+1}}{1-a}$$

□

Aufgabe Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$. Betrachte das Aussagenschema $P(n)$ geg. durch $(1+a)^n \geq 1+na$.

z.zg.: (1) $P(1)$ (2) $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

zu (1) z.zg. $(1+a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$

klar, da $(1+a)^1 = 1+a = 1+1 \cdot a \geq 1+1 \cdot a$

zu (2) Sei $n \in \mathbb{N}$, setze $P(n)$ voraus, also

$(1+a)^n \geq 1+na$ (*) zu zeigen:

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

$$\Rightarrow \text{gült } (1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{\geq 0} \stackrel{(*)}{\geq}$$

$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2$$

$$= 1+(n+1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a$$

Ander Stelle wird benutzt: $w \geq 0, u \geq v \Rightarrow uw \geq vw$